ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ SCHWARZSCHILD

ΘΕΩΡΗΜΑ BIRKHOFF:

Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ, ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΗ ΛΥΣΗ ΚΕΝΟΥ ΣΤΗ ΓΘΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ SCHWARZSCHILD.

ΣΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ SCHWARZSCHILD, Η ΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΝΑΙ

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ $r=2M$:

ΣΤΟ $r=2M$ Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΜΕΤΡΙΚΗ ΕΜΦΑΝΙΖΕΙ ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ, ΚΑΘΩΣ $g_{rr}\to\infty$. (ΔΕΝ ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΗ ΑΝΩΜΑΛΙΑ).

ΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟΝ ΤΑΝΥΣΤΗ RIEMANN ΣΕ ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ ΤΟΠΙΚΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ, ΒRΙΣΚΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΜΑΛΟΣ ΣΤΟ $r=2M$.

ΦΩΤΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ω_* ΣΕ ΑΠΟΣΤΑΣΗ r, ΟΤΑΝ ΦΘΑΝΟΥΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΕΧΟΥΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\omega_\infty = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\omega_*$$

ΕΝΩ Ο ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΕΡΥΘΡΟΜΕΤΑΘΕΣΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$z = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} - 1$$

ΕΤΣΙ, ΓΙΑ ΦΩΤΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΟΝΤΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟ $r=2M$: $\omega_\infty=0$ ΚΑΙ $z=\infty$. ΓΙΑ ΤΟ ΛΟΓΟ ΑΥΤΟ, Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ $r=2M$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ.

Μια άλλη συνέπεια της άπειρης μετάθεσης είναι η εξής:

Σε κάποια σταθερή απόσταση $r \geq 2M$ ο ίδιος χρόνος ενός παρατηρητή δίνεται από τη σχέση

$$d\tau = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{dt = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} d\tau}$$

Ένας παρατηρητής κοντά στην θέση $r=2M$ φαίνεται "παγωμένος" για έναν μακρινό παρατηρητή, καθώς ένας πεπερασμένος ίδιος χρόνος $d\tau$ αντιστοιχεί σε άπειρο χρόνο dt για $r=2M$. Οπότε, ένας μακρινός παρατηρητής δε θα δει ποτέ έναν "αστροναύτη" να περνά την $r=2M$. Αυτό που θα παρατηρήσει είναι το ίχνος του να "σβήνει" εντελώς καθώς πλησιάζει την $r=2M$.

Η επιφάνεια άπειρης μετάθεσης ονομάζεται και στατικό όριο διότι σε αυτήν κανένας παρατηρητής δε μπορεί να μείνει στάσιμος ακόμη κι αν είχε άπειρη ενέργεια (από τη στιγμή που φθάσει στο $r=2M$ υποχρεούται να εισέλθει στη μελανή οπή).

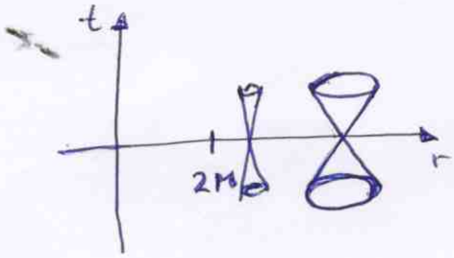
Φωτοειδείς γεωδαισιακές / κώνος φωτός

Οι φωτοειδείς γεωδαισιακές προκύπτουν από το μετρικό στοιχείο θέτοντας $ds = 0$ (για $\theta, \varphi =$ σταθ) οπότε

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

Για $r > 2M$, οι γεωδαισιακές $\frac{dr}{dt} = +\left(1-\frac{2M}{r}\right)$ και $\frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)$ περιγράφουν την τροχιά ενός φωτονίου που φεύγει από (outgoing) ή πέφτει προς (ingoing) τη μελανή οπή και σχηματίζουν τον κώνο φωτός (χρονοειδείς καμπύλες υπάρχουν μόνο εσωτερικά του κώνου)



Το άνοιγμα του κώνου φωτός εξαρτάται από την απόσταση r. Όταν $r \to 2M$ $\frac{dr}{dt} \to \pm 0$ οπότε ο κώνος στο $r = 2M$ γίνεται μια φωτοειδής επιφάνεια του χωρόχρονου (null surface) (μια κάθετη ευθεία στο διάγραμμα $t-r$). Φωτόνια που εκπέμπονται ακριβώς στο $r=2M$ παραμένουν εκεί.

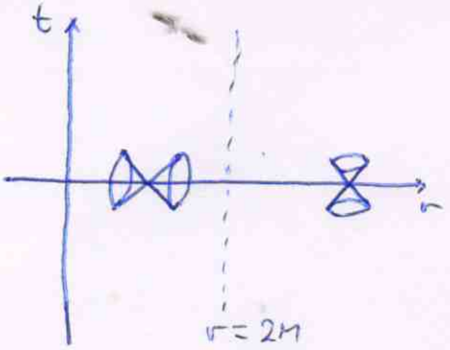
ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΓΙΑ $r<2M$;

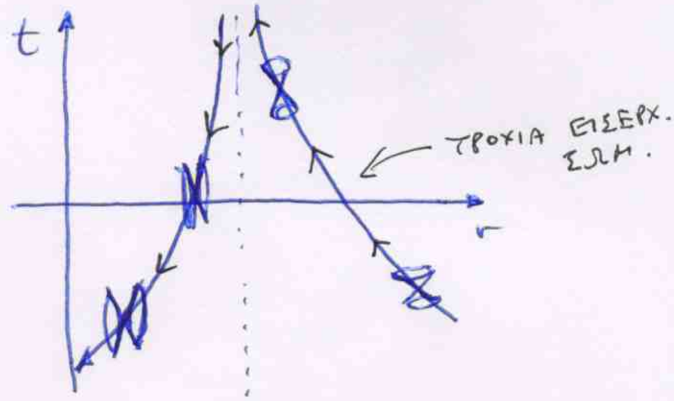
Για $r<2M$ παρατηρούμε ότι $g_{tt}<0$ και $g_{rr}>0$. Άρα οι συντεταγμένες t και r αλλάζουν χαρακτήρα στο $r=2M$, η r γίνεται χρονοειδής ενώ η t γίνεται χωροειδής.

Για τη συντεταγμένη γραμμή r $(t, \theta, \varphi = \text{σταθ.})$ είναι

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \begin{cases} <0, \text{ χωροειδής, } r>2M \\ >0, \text{ χρονοειδής, } r<2M \end{cases}$$

οπότε, για $r<2M$ ο κώνος φωτός έχει ξαφνικά αλλάξει προσανατολισμό





Η απότομη αλλαγή του προσανατολισμού του κώνου φωτός στο $r=2M$ δείχνει ότι οι συντεταγμένες Schwarzschild δεν είναι οι καταλληλότερες για την περιγραφή συγχρόνως του εσωτερικού και του εξωτερικού της Μ.Ο.

Επίσης, βλέπουμε ότι η περιοχή $r<2M$ εξαρτάται από το "χρόνο" (ο οποίος τώρα είναι το r!). Αυτό συμβαίνει σε οποιεσδήποτε συντεταγμένες κι αν χρησιμοποιήσουμε (όχι μόνο στις συντεταγμ. Schwarzschild)

ΤΕΛΙΚΑ, ΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΟ Η' ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΠΟΥ ΘΑ ΠΕΡΑΣΕΙ ΤΗΝ $r=2M$ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ ΘΑ ΤΑΞΙΔΕΨΕΙ ΠΡΟΣ ΤΟ $r=0$ (ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ) <u>ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΙΔΙΟ ΧΡΟΝΟ</u>.

ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $r=0$ ΕΙΝΑΙ <u>ΧΩΡΟΕΙΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ</u>, ΔΙΟΤΙ Η ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ t ΕΚΕΙ ΕΙΝΑΙ ΧΩΡΟΕΙΔΗΣ.

ΓΙΑ ΦΩΤΟΝΙΑ, ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥΣ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ

$$t = \pm r \pm 2M \ln\left|\frac{r}{2M}-1\right| + \sigma\tau\alpha\theta.$$

ΟΠΟΥ $\begin{cases} + & : \text{ΕΞΕΡΧ.} \\ - & : \text{ΕΙΣΕΡΧ.} \end{cases}$

ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

ΕΠΕΙΔΗ Ο ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ ΑΛΛΑΖΕΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΓΙΑ $r<2M$ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΕΤΑΙ ΠΡΟΣ ΤΟ $r=0$, ΚΑΝΕΝΑ ΦΩΤΟΝΙΟ ΠΟΥ ΕΚΠΕΜΠΕΤΑΙ ΑΠΟ ΚΑΠΟΙΟ ΣΗΜΕΙΟ $r<2M$ ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΙΑΦΥΓΕΙ ΤΗΣ ΜΕΛΑΝΗΣ ΟΠΗΣ. ΟΠΟΤΕ, ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ Μ.Ο. ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΗΣΕΙ ΜΕ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ ΚΙ ΕΤΣΙ Η $r=2M$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ.

ΓΙΑ ΤΟ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟ SCHWARZSCHILD, Η $r=2M$ ΕΙΝΑΙ ΑΡΑ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ i) ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ ii) ΣΤΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ iii) ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ.

"ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΑΝΑΛΟΓΟ"

Ο MITCHELL (1784) ΠΡΟΒΛΕΨΕ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΕ ΕΠΙΦ. ΑΠΕΙΡΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ, ΥΠΟΘΕΤΟΝΤΑΣ ΟΤΙ ΤΟ ΦΩΣ ΜΕ ΤΑΧΥΤΗΤΑ c ΔΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΙΑΦΥΓΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΟΣ ΑΣΤΕΡΑ ΜΑΖΑΣ M ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑΣ r.

$$v_{\delta\iota\alpha\varphi.} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = c$$

$$\Rightarrow r = \frac{2GM}{c^2} \rightarrow \underline{2M} \quad (!)$$

Eddington-Finkelstein

$$\boxed{v = t + r + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|}$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΦΩΤΟΣ

$$ds^2 = 0 \;, \; d\theta = d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 = 2\,dv\,dr$$

$$\Rightarrow \quad dv\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv - 2\,dr\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} v = \text{σταθ.} \\[2ex] \dfrac{dv}{dr} = 2\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow v - 2\left(r + 2M\ln\left|\dfrac{r}{2M} - 1\right|\right) = \text{σταθ.} \end{cases}$$

- Οι $v = \text{σταθ.}$ είναι μόνο εισερχόμενες διότι όταν το t μεγαλώνει, μικραίνει το r.
- Οι $v - 2\left(r + 2M\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right)$ είναι $\begin{cases} \text{εξερχόμενες}, & r > 2M \\ \text{εισερχόμενες}, & r < 2M \end{cases}$

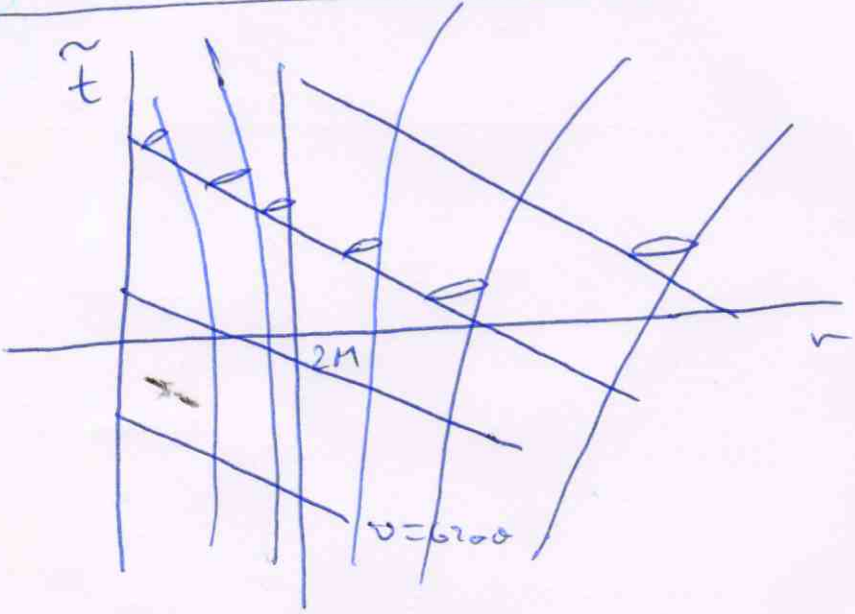
Ορίζουμε μια άλλη "χρονική" μεταβλητή

$$\tilde{t} = v - r = t + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

τότε $\quad v = \text{σταθ.} \Rightarrow \tilde{t} = -r + \text{σταθ.}$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{t}}{dr} = -1$$

ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Επιφάνεια του ορίζοντα

Στο $r = 2M \Rightarrow dv = 0$ και για τις εξερχ. φωτο. γεωδ.

οπότε $\quad ds^2 = (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \rightarrow$ 2-D φωτοειδής επιφάνεια

$$= 4M^2 d\Sigma^2$$

$$\Rightarrow A = 4M^2 \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 16\pi M^2}$$

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΑΣΤΡΟΥ