

Θεωρία του Χάους

Χάρης Βάρβογλης

Τμήμα Φυσικής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Laplace και Αιτιοκρατία - I

- Ο Laplace στο βιβλίο του πάνω στις Πιθανότητες:
 - Μπορούμε να θεωρούμε την παρούσα κατάσταση του Σύμπαντος ως το αποτέλεσμα του παρελθόντος του και την αιτία του μέλλοντός του.
 - Έστω ότι υπάρχει ένα νοήμον ον, το οποίο κάποια στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που κινούν τη Φύση και όλες τις θέσεις όλων των αντικειμένων από τα οποία αποτελείται η Φύση. Αν αυτό το ον είχε αρκετή χωρητικότητα για να υποβάλει αυτά τα στοιχεία σε ανάλυση, θα μπορούσε να συμπεριλάβει σε έναν τύπο τόσο την κίνηση των μεγαλύτερων όσο και των μικρότερων του Σύμπαντος. Για αυτό το ον τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο και το μέλλον θα βρισκόταν μπρός στα μάτια του, όπως το παρελθόν.
- Αλλά τότε τι γίνεται με την ελεύθερη βούληση των ανθρώπων;

Laplace και Αιτιοκρατία - II

- Ο Laplace είχε παρουσιάσει στον Ναπολέοντα ένα αντίτυπο του βιβλίου του περί Ουρανίου Μηχανικής. Κάποιος είχε «σφυρίξει» στον Ναπολέοντα ότι το βιβλίο δεν είχε καμιά αναφορά στον θεό. Ο Ναπολέων, που απολάμβανε να φέρνει σε δύσκολη θέση τους συνομιλητές του, τον υποδέχθηκε με την παρατήρηση: «*Κύριε Laplace, μου λένε ότι γράψατε αυτό το μεγάλο βιβλίο για το σύστημα του Σύμπαντος και δεν αναφέρατε ποτέ τον Δημιουργό του*». Ο Laplace δεν πτοήθηκε και του απάντησε ως εξής: “*Je n’aurais pas besoin de cette hypothèse-là*” (*Δεν μου χρειάστηκε αυτή η υπόθεση.*).
- Ο Ναπολέων, που διασκέδασε με τη στιχομυθία, μετέφερε αυτήν την απάντηση στον Lagrange, που αναφώνησε “*Ah! c’est une belle hypothèse; ça explique beaucoup de choses*” (*Α, είναι μια πολύ καλή υπόθεση, εξηγεί πολλά πράγματα.*).

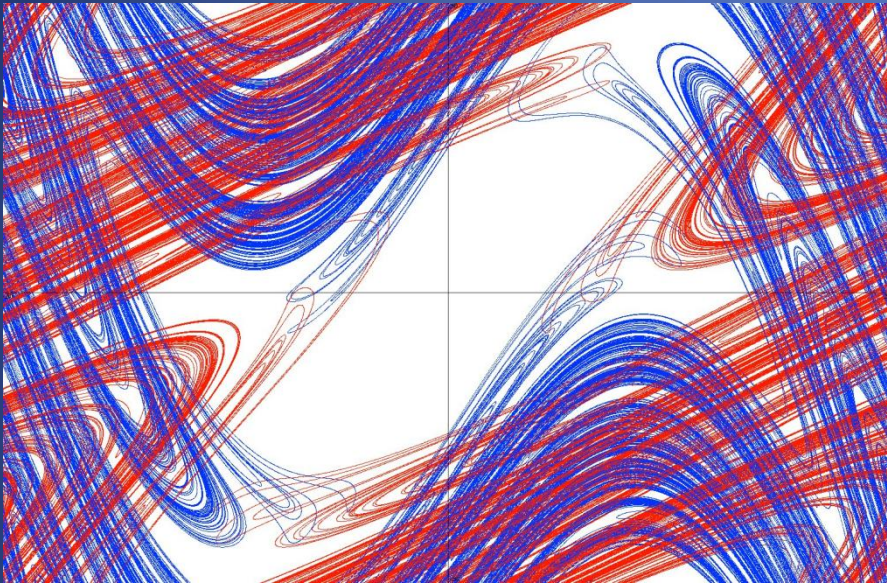
Henri Poincaré (1854-1912) - I

- Ο διαγωνισμός προκηρύχθηκε από τον βασιλιά Oscar II της Σουηδίας και της Νορβηγίας (1887).
- Είχε πολλά μαθηματικά προβλήματα, μεταξύ των οποίων το πρόβλημα των N -σωμάτων.
- Επιτροπή κρίσης: Mittag-Leffler (πρόεδρος), Weierstrass και Hermite.
- Ο Poincaré υπέβαλε μια εργασία, όπου «αποδεικνυε» την ευστάθεια του προβλήματος των 3 σωμάτων.
- Πήρε το πρώτο βραβείο, ΑΛΛΑ
- Όταν κυκλοφόρησε το τεύχος του περιοδικού που περιείχε την απόδειξή του (160 σελίδες!) συνειδητοποίησε ότι είχε κάνει ένα λάθος!

Henri Poincaré - I

- Το τεύχος ανακλήθηκε και στη θέση του τυπώθηκε ένα άλλο, με το λάθος διορθωμένο. Σ' αυτήν τη «νέα» εργασία ο Poincaré haποδείκνυε ότι το πρόβλημα των 3 σωμάτων ΔΕΝ είναι ευσταθές.
- Ο Poincaré πλήρωσε για την όλη διαδικασία παραπάνω από το ποσό του βραβείου!
- Αυτή ήταν η αρχή της Θεωρίας του Χάους.
- Η απόδειξη ήταν βασισμένη σε ποιοτικά επιχειρήματα, που έδειχναν την εξαιρετική πολυπλοκότητα των τροχιών στον χώρο των φάσεων (θέση-ορμή).
- Είχε όμως αυτό το αποτέλεσμα κάποια ποσοτική σημασία;
- Η επιστημονική κοινότητα δεν το πίστευε. Η θεωρία των Laplace-Lagrange δούλευε μια χαρά στο Ηλιακό Σύστημα

Η πολυπλοκότητα του Poincaré



"Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à maille infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.»

On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer."

Ηλεκτρονικοί υπολογιστές

Edward Norton Lorenz (1917 – 2008)

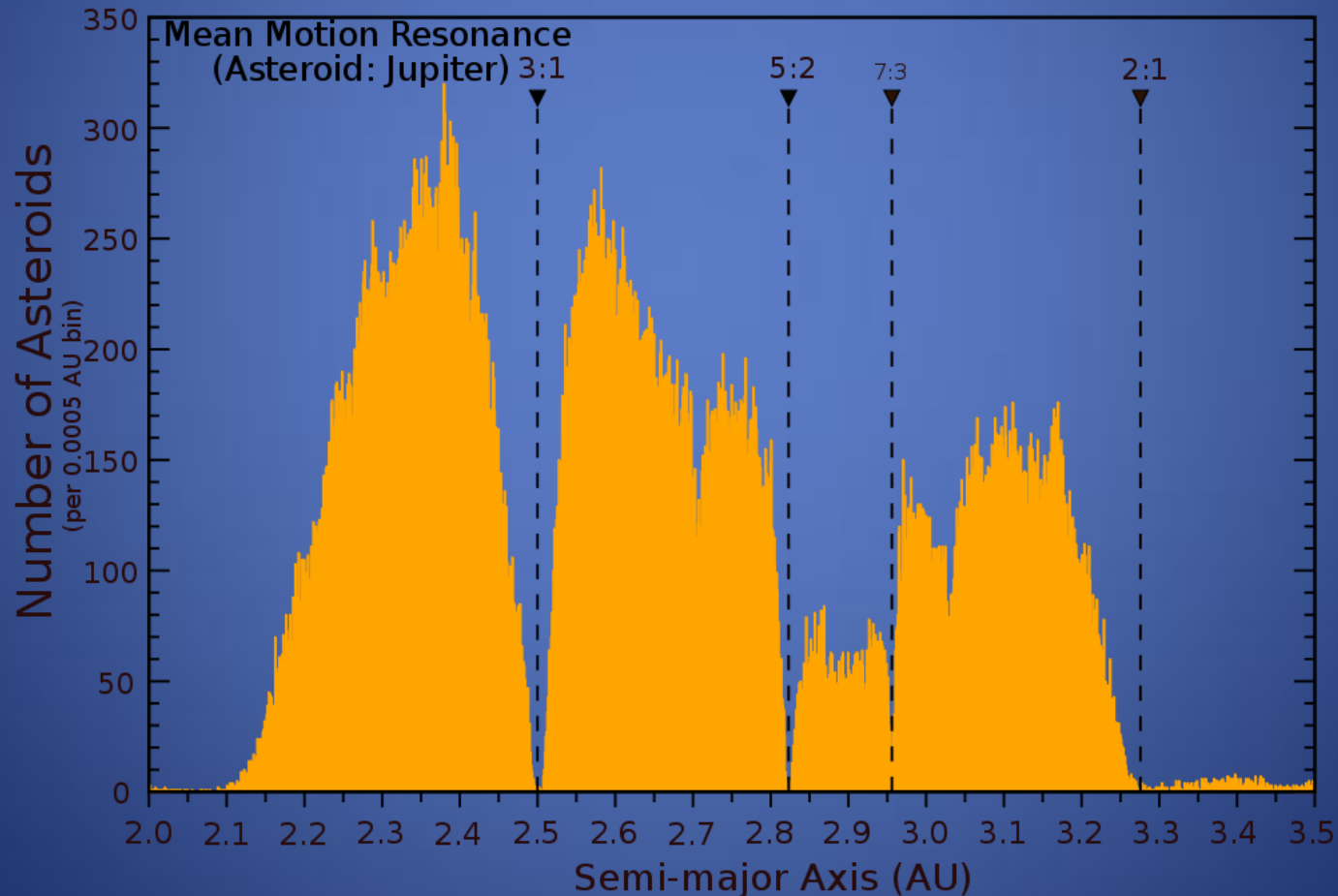
- Μελετούσε το απλούστερο δυνατό μοντέλο της ατμοσφαιρικής κυκλοφορίας (ένα σύστημα από 3 διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης με 3 εξαρτημένες μεταβλητές).
- Διακοπή – συνέχιση της αριθμητικής ολοκλήρωσης (περιορισμένος αριθμός σημαντικών ψηφίων).
- Φαινόμενο της πεταλούδας.

Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

- Παράδειγμα από την Ουράνια Μηχανική (προβλήματα του 1-, των 2-, των 3- και των N σωμάτων).
- Τακτικός και χαοτικός χαρακτήρας των τροχιών.
- Περιοχές (φαινόμενης) τάξης και περιοχές (φαινόμενου) χάους.
- Εφαρμογές στο Ηλιακό Σύστημα (π.χ. διάκενα Kirkwood).

Διάκενα Kirkwood

Asteroid Main-Belt Distribution Kirkwood Gaps



Χαρακτηριστικά του Χάους

- Πολυπλοκότητα (γεωμετρική εικόνα του Poincaré).
- Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες (εκθέτης Lyapunov)
 - Ακρίβεια των αρχικών συνθηκών – αποδεκτό χρονικό διάστημα της λύσης.
- Σχέση με το 2^ο αξίωμα της Θερμοδυναμικής.
 - Νεώτερα αποτελέσματα (Yakov Sinai – ιδανικό αέριο).
- Θα πρέπει να καταλήξουμε ότι η περιοχή της τάξης έχει μηδενικό μέτρο (δηλ. όγκο στον χώρο των φάσεων).
- Τι συμβαίνει στα «πραγματικά» δυναμικά συστήματα;
 - Παράδειγμα του δυναμικού $V = -x^2y^2$