

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΕΤΑ ΤΟΝ ΝΕΥΤΩΝΑ

Χάρης Βάρβογλης

Τμήμα Φυσικής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χόιχενς (Huygens)

- ▣ Διατύπωσε την αρχή της διατήρησης της ορμής σε ένα (κλειστό) σύστημα N -σωμάτων.
- ▣ Στη συνέχεια διατύπωσε τους νόμους των κρούσεων μεταξύ σωμάτων.
- ▣ Υπολόγισε τη φυγόκεντρο δύναμη στην ομαλή κυκλική κίνηση (δηλ. με σταθερή γωνιακή ταχύτητα).
- ▣ Κατανόησε την εξάρτηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g , από το γεωγραφικό πλάτος, $g(\varphi)$.

Χαρακτηριστικά της Νευτώνειας Μηχανικής

- ▣ Βασίζεται στην έννοια της ΔΥΝΑΜΗΣ
- ▣ Πάντα $3N$ διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, ανεξάρτητα από την ύπαρξη δεσμών.
- ▣ Χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη «όλες» οι δυνάμεις (π.χ. η τάση του νήματος στη μηχανή του Atwood).
- ▣ Στηρίζεται σε 3 νόμους-αξιώματα (σύμφωνα με το ξυράφι του Occam, θα προτιμούσαμε μια θεωρία βασισμένη σε δύο ή σε *ένα* αξίωμα).

Αναλυτική Μηχανική

Η αρχή της ελάχιστης δράσης

- ▣ Με τον όρο *αρχή της ελάχιστης δράσης* περιγράφουμε δύο διαφορετικά πράγματα.
 - I. Στην Οπτική, *η αρχή του Fermat* λέει ότι οι φωτεινές ακτίνες ακολουθούν εκείνη τη *διαδρομή* (π.χ. σε 2 διαστάσεις $y = f(x)$), η οποία ελαχιστοποιεί τον χρόνο διάδοσης του φωτός (βλέπε και την αρχή του *Mauvertuis* στη Μηχανική, η οποία δίνει με τον ίδιο τρόπο *το σχήμα $y = f(x)$* της τροχιάς ενός σώματος).
 - II. Κατ' αναλογία, μπορούμε να βρούμε παρόμοιες αρχές, οι οποίες ισχύουν για την *κίνηση* (δηλ. $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$) ενός συστήματος n σωμάτων. Η πιο χρήσιμη στη Φυσική γενικά (δηλ. πέρα από την Κλασική Μηχανική) είναι η *αρχή του Hamilton*, στην οποία στηρίζονται οι δύο κυριότερες θεωρίες Αναλυτικής Μηχανικής:
 - Η *Μηχανική του Lagrange* και η *Μηχανική του Hamilton*.

Μηχανική του Lagrange

- ▣ Βασίζεται στην έννοια της ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
- ▣ «Χαρακτηριστική» συνάρτηση: L
- ▣ Στην απλούστερη περίπτωση: $L = T - W$
- ▣ Αρχή του Hamilton: η *συναρτησιακή* $\int L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ παίρνει ακραία τιμή (συνήθως ελάχιστο) αν υπολογιστεί κατά μήκος της πραγματικής τροχιάς μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου (μόνο *ένα* αξίωμα!).
- ▣ Από αυτό προκύπτουν N διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, αν το σύστημα έχει N βαθμούς ελευθερίας.
- ▣ Σημαντικό: $N \leq 3n$.

Μηχανική του Hamilton

- ▣ Βασίζεται στην έννοια της ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
- ▣ «Χαρακτηριστική» συνάρτηση: H .
- ▣ Στην απλούστερη περίπτωση $H = T + W$ (η «ενέργεια»).
- ▣ Το αξίωμα είναι το ίδιο με αυτό της Μηχανικής του Lagrange.
- ▣ Αλλά προκύπτουν $2N$ διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης, για N βαθμούς ελευθερίας.
- ▣ Και πάλι $N \leq 3n$.

Σύγκριση της Μηχανικής Lagrange με τη Μηχανική Hamilton

- Και οι δύο είναι ισοδύναμες με τη Μηχανική του Νεύτωνα, οπότε είναι ισοδύναμες και μεταξύ τους.
- Πολύ γενικά μπορούμε να πούμε ότι, πέρα από την Κλασική Μηχανική:
 - Η Μηχανική του Lagrange βρίσκει εφαρμογές στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας και σε συστήματα με μη-συντηρητικές δυνάμεις (δηλ. με «τριβή»).
 - Η Μηχανική του Hamilton βρίσκει εφαρμογές στην Κβαντομηχανική.
 - Αλλά, αφού είναι ισοδύναμες, η μία «προσέγγιση» μπορεί να μετασχηματιστεί στην άλλη!
- Βιβλία Goldstein και Landau: μόνο Αναλυτική Μηχανική!
- Χρονολογική σειρά εμφάνισης των εννοιών της ορμής [Νεύτων] και της ενέργειας [Λαπλάς-Λαγκράνζ (τέλη 18^{ου}-αρχές 19^{ου} αιώνα)-Γιάγκ-Ράνκιν (μέσα 19^{ου} αιώνα)].

Μη-Γραμμική Μηχανική

- ▣ Μετά τους Laplace-Lagrange-Hamilton, δύο σημαντικές προσωπικότητες:
 - Henri Poincaré: το πρόβλημα των 3 σωμάτων είναι μη ολοκληρώσιμο - (πατέρας της Θεωρίας του Χάους).
 - Andrey Kolmogorov: Το Χάος είναι αναπόφευκτο σε όλα τα μη ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα (δηλ. πρακτικά σε όλα τα δυναμικά συστήματα) αλλά, παρόλα αυτά, σε πολλές περιπτώσεις η περιοχή στην οποία εμφανίζονται χαοτικά φαινόμενα είναι πολύ μικρή.

Η Μηχανική σήμερα - I

- ▣ Η Μηχανική του Νεύτωνα διδάσκεται σε Γυμνάσια, Λύκεια και στα πρώτα έτη των πανεπιστημίων (Φυσική του 1600).
- ▣ Η Αναλυτική Μηχανική διδάσκεται στα τελευταία έτη των πανεπιστημίων και σε μεταπτυχιακές σπουδές (Φυσική του 1700-1800).
- ▣ Η Νευτώνεια Μηχανική χρησιμοποιείται για τη επίλυση «απλών» προβλημάτων.
- ▣ Η Αναλυτική Μηχανική χρησιμοποιείται για την επίλυση «σύνθετων» προβλημάτων, όπως π.χ. η κίνηση των πλανητών στο ηλιακό σύστημα.

Η Μηχανική σήμερα - II

- Μόνο ένα μικρό υποσύνολο των δυναμικών συστημάτων (πιθανόν μέτρου μηδέν!) μπορεί να *επιλυθεί επακριβώς* (δηλ. είναι *ολοκληρώσιμο*). Σ' αυτό περιλαμβάνονται όλα τα συστήματα με 1 βαθμό ελευθερίας. Πέρα από αυτά, γνωρίζουμε λιγότερα από 10 ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα: το πρόβλημα των 2 σωμάτων (κι αυτό όχι πλήρως!), την Toda lattice και το πρόβλημα των 2 ελκτικών κέντρων (και αυτά όχι πλήρως με τη συνηθισμένη έννοια, δηλ. $x = f(t)$!).
- Η εύρεση προσεγγιστικών λύσεων για μη-ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα είναι ευκολότερη μέσω της Αναλυτικής Μηχανικής.
- Η αιχμή της έρευνας σήμερα: Μη-Γραμμική δυναμική, Poincaré, Kolmogorov, Arnold, Nekhoroshev κλπ., μεταβλητές δράσης-γωνίας που θα αναφερθούν στη συνέχεια στην *Κβαντομηχανική* και στη *Θεωρία του Χάους* (Φυσική του 1900).