

Κύματα και Αστάθειες στο Πλάσμα *†

Λουκάς Βλάχος,
Τμήμα Φυσικής,
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης,
54006 Θεσσαλονίκη
E-mail:vlahos@astro.auth.gr

10 Δεκεμβρίου 2003

Περίληψη

Στο μάθημα αυτό θα υπολογίσουμε την εξίσωση διασποράς επιλεγμένων ηλεκτροστατικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διεγείρονται και διαδίνονται μέσα στο πλάσμα. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές αστάθειες εφαρμόζοντας τη θεωρία διαταραχών στις εξισώσεις Vlassov-Maxwell ή του ρευστού πλάσματος και θα υπολογίσουμε το γραμμικό ρυθμό ανάπτυξης των ασταθών κυμάτων.

1 Εισαγωγή

Το πλάσμα είναι ένα δυναμικό σύστημα που αποτελείται από κύματα και φορτία (ηλεκτρόνια και πρωτόνια) μη γραμμικά συζευγμένα. Με βάση αυτή τη γενική διαπίστωση θα ήταν χρήσιμο να συζητήσουμε μερικά βασικά ερωτήματα: (α) Ποιές είναι οι κανονικές ταλαντώσεις που μπορούν να διεγερθούν και διαδοθούν στο πλάσμα; (β) Πώς θα υπολογίσουμε το ρυθμό ανάπτυξης των ασταθών κυμάτων οταν το πλάσμα απομακρύνεται από τη θερμοδυναμική ισορροπία ; Στο μαθημα αυτό θα επεξεργαστούμε τα παραπάνω ερωτηματα.

1.1 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό

Η δημιουργία και διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κύματων στο κενό ή σε αγώγιμα υλικά αποτελούν θέματα της ηλεκτροδυναμικής και θα θεωρήσω ότι έχετε

*Στη μνήμη του καλού μου φίλου και συνεργάτη Χρόνη Πολυμίλη

†Σημειώσεις για το μαθημα στο Σχολείο ‘ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΥΝΤΗΞΗΣ’, Βόλος 16 - 21 Μαΐου, 2002

ακούσει αρκετά πράγματα ώστε να μην είναι αναγκη να τα επαναλάβω. Θα επαναλάβω μόνο μερικές βασικές έννοιες και ότι σας παραπέμψω στο βιβλίο του Griffiths¹ για περισσότερες πληροφορίες και εμβάθυνση.

Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Συμπεραίνουμε ότι στο κενό το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάδοση κύματος με ταχύτητα c . Από τις Εξ. (1)-(2) συμπεραίνουμε ότι ‘Το φώς είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στο κενό’.

Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση κύματος έχει λύση της μορφής (επίπεδο κύμα)

$$A = A_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα και \vec{k} ο κυματάρυθμος, τότε αντικαθιστώντας στην Εξ.(3) έχουμε

$$\boxed{\omega^2 = c^2 k^2} \quad (5)$$

ή

$$D(\omega, \vec{k}) = \omega^2 - c^2 k^2 = 0. \quad (6)$$

όπου D είναι η συνάρτηση διασποράς. Η Εξ. (6) είναι γνωστή ως εξίσωση διασποράς και συνδέει τη γωνιακή συχνότητα με τον κυματάριθμο $\omega(\vec{k})$. Ο δείκτης διάθλασης στο κενό είναι

$$n = \frac{ck}{\omega} = 1,$$

η φασική ταχύτητα είναι $v_\phi = \omega/k = c$ και $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c$ είναι η ταχύτητα ομάδας (η ταχύτητα μεταφοράς της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος).

¹Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, David Griffiths, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1997

1.2 Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε αγωγούς

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε αγωγούς. Αν η πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων μέσα στον αγωγό είναι ρ_f και η πυκνότητα του ρεύματος \vec{j}_f τότε σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, το ρεύμα που προκαλεί η παρουσία ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} θα είναι

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} \quad (7)$$

όπου σ συμβολίζει την ηλεκτρική αγωγιμότητα του αγωγού. Οι εξισώσεις Maxwell θα πάρουν τη μορφή

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_f \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (11)$$

Εφαρμόζοντας το στροβιλισμό στις Εξ.(10) και (11) και κάνοντας χρήση του νόμου του Ohm έχουμε (όταν το $\rho_f = 0$),

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13)$$

Αναζητώντας λύση της μορφής των επιπέδων κυμάτων (βλέπε Εξ. (4)) η εξίσωση διασποράς θα πάρει μιγαδική μορφή

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2 + i(4\pi\sigma)\omega.} \quad (14)$$

Αν υποθέσουμε οτι η συχνότητα είναι πραγματική και ο κυματοριθμός είναι μιγαδικός ($\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$) τότε από τη λύση της Εξ. (14) υπολογίζουμε,

$$k_r = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{c\omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} \geq 0 \quad (15)$$

$$k_i = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{c\omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \geq 0 \quad (16)$$

Αντικαθιστώντας το μηχανικό κυματάρυθμο στο ηλεκτρικό και μαγνητικό επίπεδο κύμα έχουμε

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)} \quad (17)$$

όμοια για το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)}. \quad (18)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα θα αποσβεσθεί σε απόσταση $r > (1/k_i)$. Στο κενό ($\sigma \rightarrow 0$) το $k_r = \omega/c$ και $k_i = 0$ που είναι οι γνωστές μας λύσεις (Εξ. (5)).

1.3 Ακουστικές ταλαντώσεις

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα ιδανικά ρευστά, είναι:

- Η εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (19)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα και \vec{u} η ταχύτητα του ρευστού,

- Η εξίσωση κίνησης (Euler)

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P \quad (20)$$

και η καταστατική εξίσωση $P = \rho k_B T / m$, όπου P είναι η πίεση, k_B η σταθερά του Boltzman και T η θερμοκρασία.

Θα μελετήσουμε αν οι Εξ.(19) και (20) έχουν λύσεις της μορφής $\rho = \rho_0 + \rho_{10} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ (ταλάντωση γύρω από την πυκνότητα ρ_0 του ρευστού), $\vec{u} = \vec{u}_1 = u_{10} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ (το ρευστό είναι ακίνητο, $\vec{u}_0 = 0$, και μελετάμε μόνο την εξέλιξη των διαταραχών της ταχύτητάς του). Με τις παραδοχές αυτές καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$-i\omega\rho_0\vec{u}_1 = -\frac{k_B T}{m} i\vec{k}\rho_1 \quad (\text{εξίσωση κίνησης})$$

$$-i\omega\rho_1 + \rho_0 i\vec{k} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{εξίσωση συνέχειας})$$

Αν υποθέσουμε ότι $\vec{k} = k\vec{e}_x$ και $\vec{u}_1 = u_1\vec{e}_x$, τότε

$$i\omega\rho_0u_1 = \frac{k_B T}{m} ik \frac{\rho_0 iku_1}{i\omega}$$

ή

$$\omega^2 u_1 = k^2 \frac{k_B T}{m} u_1$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boxed{\omega = kc_s} \quad (21)$$

όπου

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{1/2}$$

είναι η ταχύτητα του ήχου. Η Εξ. (21) είναι η εξίσωση διασποράς των ακουστικών κυμάτων (sound waves) όταν διαδίδονται μέσα σε ιδανικό ρευστό.

2 Κύματα σε μη μαγνητισμένο πλάσμα

2.1 Το πλάσμα ως διηλεκτρικό

Το πλάσμα συμπεριφέρεται ως διηλεκτρικό με αγωγιμότητα $\vec{\sigma}$ (στη γενικότερη περίπτωση η αγωγιμότητα είναι τανυστικό μέγεθος). Οι μικροσκοπικές ιδιότητες του πλάσματος προσδιορίζουν τη μορφή του τανυστή της αγωγιμότητας. Η μακροσκοπική αντίδραση του πλάσματος (αλλά και κάθε διηλεκτρικού) στην εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου είναι το αποτέλεσμα της κίνησης των φορτίων που το αποτελούν. Στα αγώγιμα υλικά, η μακροσκοπική αντίδραση τους προσδιορίζεται στο μικροσκοπικό επίπεδο από την απομάκρυνση των θετικών και αρνητικών φορτίων. Αν εφαρμόσουμε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο που μεταβάλλεται με το χρόνο και η αντίδραση του πλάσματος θα παρουσιάζει τα ίδια χαρακτηριστικά. Με το τρόπο αυτό δημιουργείται στο πλάσμα ρεύμα από την

κίνηση των φορτίων ή απλά ένα ρεύμα μετατόπισης. Στο μακροσκοπικό επίπεδο το ρεύμα που προκαλεί η παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου προσδιορίζεται από το νόμο του Ohm,

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (22)$$

Η αγωγιμότητα προσδιορίζεται από τη δυναμική των φορτίων σε μικροσκοπικό επίπεδο. Αν υποθέσουμε οτι το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται με το χρόνο $E \sim \exp(-i\omega t)$ τότε η Εξ. (11) γράφεται

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \left(\frac{4\pi}{c} \vec{\sigma} - \vec{I} \frac{i\omega}{c} \right) \cdot \vec{E} \\ &= -\frac{i\omega}{c} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (23)$$

όπου \vec{I} είναι ο μοναδιαίος τανυστής και

$$\vec{\varepsilon} = \vec{I} + i \frac{4\pi}{\omega} \vec{\sigma} \quad (24)$$

είναι ο διηλεκτρικός τανυστής. Αν παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο την Εξ. (23) και χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (10) τότε έχουμε

$$\begin{aligned} -c \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\omega^2}{c} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Μέχρι το σημείο αυτό όσα είπαμε είναι γενικά. Για να προχωρήσουμε πρέπει να διαλέξουμε ένα μοντέλο μικροσκοπικής περιγραφής του πλάσματος και να υπολογίσουμε την αγωγιμότητα.

2.2 Κύματα σε ψυχρό μη μαγνητισμένο πλάσμα

Η μικροσκοπική περιγραφή της κίνησης των φορτίων παρουσία ηλεκτρικού πεδίου ($E \sim \exp(-i\omega t)$) και απουσία μαγνητικού πεδίου μπορεί να είναι απλή αν υποθέσουμε ότι όλα τα φορτία είναι αρχικά ακίνητα (το πλάσμα είναι ψυχρό και η θερμική ταχύτητα είναι μηδέν) και η συχνότητα ταλάντωσης είναι τόσο υψηλή ώστε τα ιόντα να παραμένουν ακίνητα. Από την εξίσωση κίνησης των ηλεκτρονίων

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

υπολογίζουμε τη ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{e}{i\omega m_e} \vec{E}$$

και το ρεύμα

$$\vec{j} = -n_0 e \vec{v} = \left(-\frac{n_0 e^2}{i\omega m_e} \right) \vec{E}.$$

Η αγωγιμότητα $\vec{\sigma} = -n_0 e^2 / (i\omega m_e) \vec{I}$ υπολογίζεται από το νόμο του Ohm και η διηλεκτρική σταθερά ισούται με

$$\vec{\epsilon} = \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \right) \vec{I} \quad (26)$$

όπου $\omega_e = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}$ είναι η συχνότητα πλάσματος.

Αν υποθέσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο συμπεριφέρεται ως επίπεδο κύμα

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

τότε από την Εξ. (25) έχουμε

$$[\omega^2 - \omega_e^2 - k^2 c^2] \vec{E} + c^2 (\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})) = 0. \quad (27)$$

Αν το κύμα διαδίδεται κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο (είναι **ηλεκτρομαγνητικό**) τότε $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$, η εξίσωση διασποράς παίρνει τη μορφή $D(\omega, \vec{k}) \vec{E} = 0$, άρα για να είναι το ηλεκτρικό πεδίο διάφορο του μηδενός θα πρέπει,

$$D(\omega, \vec{k}) = \omega^2 - \omega_e^2 - k^2 c^2 = 0 \quad (28)$$

ή

$$\boxed{\omega^2 = \omega_e^2 + c^2 k^2.} \quad (29)$$

Στο κενό ($\omega_e \rightarrow 0$) η Εξ.(29) μετατρέπεται στην εξίσωση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό που υπολογίσαμε ήδη (Εξ.(5)). Από την Εξ.(29) συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να διαδοθεί στο πλάσμα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα $\omega < \omega_e$ γιατί ο κυματάρυθμος θα γίνει φανταστικός και το κύμα θα αποσβαίνει γρήγορα. Η συχνότητα πλάσματος αποτελεί ‘**συχνότητα αποκοπής**’ για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στο πλάσμα. Η πληροφορία αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί προσδιορίζει το εύρος των συχνοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη ραδιοεπικοινωνία με δορυφόρους. Για να επικοινωνήσουμε με δορυφόρους θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα πλάσματος της ιονόσφαιρας. Μπορούμε επίσης να στείλουμε σήματα από το βόρειο ημισφαίριο στο νότιο επιδιώκοντας την ανάκλασή τους στην ιονόσφαιρα (όταν η συχνότητες $\omega < \omega_e$).

Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στο \vec{k} τότε το κύμα είναι διαμήκες και αναγκάζει τα φορτία να εκτελούν ταλαντώσεις παράλληλα με το ηλεκτρικό πεδίο, τα κύματα αυτά λέγοντα **ηλεκτροστατικά**. Από τη Εξ. (27) έχουμε μιά νεα εξίσωση διασποράς

$$D(k, \omega) = \omega^2 - \omega_e^2 = 0$$

ή

$$\boxed{\omega^2 = \omega_e^2.} \quad (30)$$

Τα κύματα αυτά είναι γνωστά ως ηλεκτροστατικά κύματα υψηλής συχνότητας σε μη μαγνητισμένο πλάσμα (**κύματα πλάσματος**).

Οι εξισώσεις διασποράς που υπολογίσαμε μέχρι τώρα συνδεονται άμεσα με το μοντέλο του πλάσματος που χρησιμοποιήσαμε (ψυχρό μη μαγνητισμένο πλάσμα). Αγνοήσαμε τις ψερμικές κινήσεις των φορτίων. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το πρότυπο των δύο ρευστών για να προσεγγίσουμε καλύτερα την εξίσωση διασποράς των κυμάτων πλασματος.

3 Η περιγραφή του πλάσματος από δύο ρευστά

Το πλάσμα μπορεί να περιγραφεί από δύο ηλεκτροστατικά συζευγμένα ρευστά (ηλεκτρόνια και πρωτόνια). Το ρευστό των ηλεκτρονίων περιγράφεται πλήρως όταν γνωρίζουμε τη πυκνότητα n_e , τη ταχύτητα \vec{v}_e και τη πίεση P_e . Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ρευστό των ηλεκτρονίων είναι:

- Εξίσωση συνέχειας των ηλεκτρονίων

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (31)$$

- Εξίσωση κίνησης ηλεκτρονίων

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla u_e \right] = -\nabla P_e - n_e e \left[\vec{E} + \frac{\vec{u}_e \times \vec{B}}{c} \right] \quad (32)$$

όμοια και για τα ιόντα με πυκνότητα n_i , ταχύτητα \vec{u}_i και πίεση P_i έχουμε

- Εξίσωση συνέχειας ιόντων

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{u}_i) = 0 \quad (33)$$

- Εξίσωση κίνησης ιόντων

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \nabla u_i \right] = -\nabla P_i + n_i e \left[\vec{E} + \frac{\vec{u}_i \times \vec{B}}{c} \right] \quad (34)$$

Τα δύο ρευστά είναι συζευγμένα ηλεκτροστατικά και οι κινήσεις τους θα διεγείρουν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e) \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (36)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (37)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (38)$$

όπου $\vec{j} = e(n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e)$. Η πίεση των ηλεκτρονίων και ιόντων δεν είναι γνωστή αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με τις καταστατικές εξισώσεις των ιδανικών αερίων $P_e = \gamma_e n_e T_e$ και $P_i = \gamma_i n_i T_i$ όπου γ_e, γ_i , είναι οι λόγοι των ειδικών θερμοτήτων για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα αντίστοιχα.

3.1 Ηλεκτροστατικά κύματα υψηλής συχνότητας

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων των δύο ρευστών και θεωρώντας ότι τα ιόντα είναι ακίνητα, $n_i = n_{i0}$ έχουμε

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (39)$$

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e = -\vec{\nabla} P - n_e e \left[\vec{E} + \frac{\vec{u}_e \times \vec{B}}{c} \right] \quad (40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e) \quad (41)$$

Ακολουθώντας την θεωρία των γραμμικών διαταραχών για τα μεγέθη $n = n_0 + n_1$, $\vec{B} = \vec{B}_1 = 0$, $\vec{u}_e = \vec{u}_{e1}$, $\vec{E} = \vec{E}_1$ και αν θεωρήσουμε ότι $\vec{E}_1 \parallel x$ και $\vec{u}_1 \parallel \vec{E}_1$, τότε οι Εξ. (39)-(41) παίρνουν τη μορφή

$$-i\omega n_1 + i n_0 k_x u_{1x} = 0 \quad (42)$$

$$-i\omega m_e n_0 u_{1x} = -e n_0 E_{1x} - 3ik_B T_e k_x n_1 \quad (43)$$

$$ik_x E_{1x} = -4\pi e n_1. \quad (44)$$

Λύνοντας την εξίσωση (42) ως προς u_{1x} και την εξίσωση (44) ως προς n_1 και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (43) βρίσκουμε

$$(\omega^2 - \omega_e^2 - 3k_x^2 k_B T_e / m_e) E_{1x} = 0. \quad (45)$$

Επειδή το E_{1x} είναι διάφορο του μηδενός, η εξίσωση (45) επαληθεύεται μόνο όταν

$$\boxed{\omega^2 = \omega_e^2 + 3k_x^2 \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right) = \omega_e^2 + 3k_x^2 V_e^2.} \quad (46)$$

όπου $V_e = k_B T_e / m_e$ είναι η θερμική ταχύτητα. Η εξίσωση διασποράς Εξ.(46) διορθώνει την Εξ.(30) όταν η προσέγγιση του ‘ψυχρού’ πλάσματος δεν είναι ικανοποιητική.

3.2 Εξισώσεις Vlassov-Maxwell

Η Κινητική Θεωρία αποτελεί το ακριβέστερο πλαίσιο περιγραφής του πλάσματος. Η γνώση των συνάρτησεων κατανομής των ηλεκτρονίων και ιόντων ($f_e(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $f_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$) προσδιορίζουν πλήρως την κατάσταση του πλάσματος. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των συνάρτησεων κατανομής, είναι γνωστές ως εξισώσεις Vlassov-Maxwell.

- Εξίσωση Vlassov ηλεκτρονίων (αγνοούμε τις συγκρούσεις)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_e - e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v f_e = 0 \quad (47)$$

όπου

$$\nabla_v = \frac{\partial}{\partial v_x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial v_z} \hat{e}_z$$

- Εξίσωση Vlassov ιόντων (αγνοούμε τις συγκρούσεις)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_i + e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v f_i = 0 \quad (48)$$

- Εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (50)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (51)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (52)$$

- Η πυκνότητα φορτίων και ρεύματος

$$\rho = e \int (f_i - f_e) d\vec{v} \quad (53)$$

$$\vec{j} = e \int (f_i - f_e) \vec{v} d\vec{v}. \quad (54)$$

3.3 Απόσβεση στα κύματα πλάσματος

Τα κύματα πλάσματος είναι (1) ηλεκτροστατικά (δηλαδή οι διαταραχές του μαγνητικού πεδίου είναι αμελητέες ($B_1 = 0$)) (2) υψηλής συχνότητας, άρα τα ιόντα θα τα θεωρήσουμε ακίνητα, (3) απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ($B = 0$). Αν υποθέσουμε επίσης ότι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν, η εξίσωση Vlassov για τα ηλεκτρόνια παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_e - \frac{e}{m_j} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_v f_e = 0 \quad (55)$$

Γραμμικοποιούμε την Εξ.(55) και την εξίσωση Poisson (Εξ.(49)) (οι υπόλοιπες εξισώσεις Maxwell δεν είναι χρήσιμες στην παρούσα ανάλυση λόγω της απουσίας μαγνητικού πεδίου και ρεύματος) και θέτοντας $\vec{E} = \vec{E}_1$, δηλαδή υπόθετοντας ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, υποθέτουμε επίσης ότι $f_e = f_{e0} + f_{e1}$ και έχουμε για τους όρους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{e1} - \frac{e}{m_e} \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_v f_{e0} = 0 \quad (56)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 4\pi\rho \quad (57)$$

Επειδή μελετάμε κύματα υψηλής συχνότητας, η μάζα των ιόντων μπορεί να θεωρηθεί ‘άπειρη’, δηλαδή τα ιόντα παραμένουν σχεδόν ακίνητα στο χρόνο που εξελίσσεται το φαινόμενο που μελετάμε ($f_{i1} = 0$). Θεωρούμε επίσης ότι οι διαταραχές f_{e1} και E_1 έχουν τη μορφή

$$f_{e1} = f_{10} e^{i(\tilde{k} \cdot \tilde{r} - \omega t)} \quad (58)$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{i(\tilde{k} \cdot \tilde{r} - \omega t)} \quad (59)$$

και οι Εξ.(56)-(57) απλοποιούνται και παίρνουν τη μορφή

$$-i\omega f_{e1} + i\vec{k} \cdot \vec{v} f_{e1} - \frac{e}{m_e} \vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_{e0} = 0 \quad (60)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -4\pi e \int f_{e1} d\vec{v}. \quad (61)$$

Από την εξίσωση (60) υπολογίζουμε τη διαταραχή της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων

$$f_{e1} = -\frac{ie}{m_e} \left(\frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_v f_{e0}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} \right).$$

Επειδή οι ταλαντώσεις των ηλεκτρονίων ως ακολουθούν τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι παράλληλο προς τη διεύθυνση

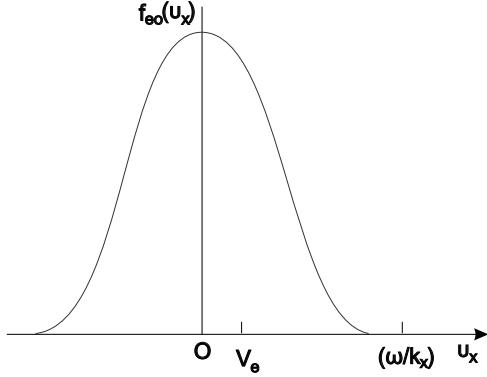
x , είναι αρκετό να μελετήσουμε μόνο τη διεύθυνση ταλάντωσης κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου.

$$f_{e1} = -\frac{ie}{m_e} \left(\frac{E_{1x} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_x}}{k_x v_x - \omega} \right). \quad (62)$$

Τα κύματα αυτά ονομάζονται διαμήκη. Αντικαθιστώντας στην Εξ.(61) την f_{e1} από την Εξ.(62) έχουμε τη σχέση διασποράς για ηλεκτροστατικά κύματα υψηλής συχνότητας απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου

$$1 + \frac{\omega_e^2}{n_0 k_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{\frac{df_{e0}}{dv_x}}{\frac{\omega}{k_x} - v_x} = 0. \quad (63)$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες ως προς v_x και έχουμε



Σχήμα 1: Η φασική ταχύτητα των ηλεκτροστατικών κυμάτων υψηλής συχνότητας είναι πολύ μεγαλύτερη από τη θερμική ταχύτητα του πλάσματος

$$1 - \frac{\omega_e^2}{n_0 k_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{f_{e0}}{\left(\frac{\omega}{k_x} - v_x\right)^2} = 0. \quad (64)$$

γιατί η συνάρτηση κατανομής είναι μηδέν στο $\pm\infty$. Αν περιοριστούμε στη μελέτη των κυμάτων με μεγάλη φασική ταχύτητα, $\omega/k_x \gg v_x$ (βλ. Σχ. 1), ο παρονομαστής $[\omega/k_x - v_x]$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά και κρατώντας όρους μέχρι τάξεως $[v_x/(\omega/k_x)]^2$ βρίσκουμε

$$1 - \frac{\omega_e^2}{n_0 \omega^2} \int dv_x f_{e0} \left(1 + \frac{2v_x k_x}{\omega} + \frac{3v_x^2 k_x^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (65)$$

Αν υποθέσουμε ότι f_{e0} είναι Maxwellian, (σε μία διάσταση)

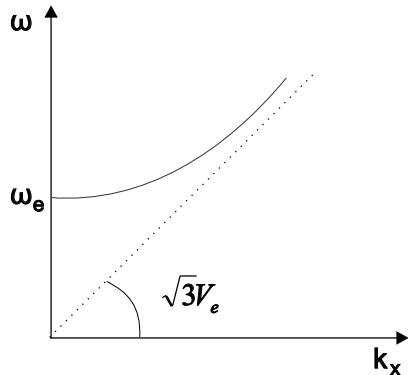
$$f_{e0}(v_x) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}V_e} e^{-\frac{v_x^2}{2V_e^2}}$$

τότε, μετά τις ολοκληρώσεις,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{e0} dv_x = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f_{e0} dv_x = n_0 V_e^2$$

καταλήγουμε στη σχέση διασποράς των ηλεκτροστατικών κυμάτων υψηλής συχνότητας απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου,



Σχήμα 2: Γραφική απεικόνιση της σχέσης διασποράς των κυμάτων πλάσματος.

$$\omega^2 = \omega_e^2 + 3 \frac{\omega_e^2}{\omega^2} k_x^2 V_e^2$$

ή

$$\omega^2 = \omega_e^2 + 3 k_x^2 V_e^2 \quad (66)$$

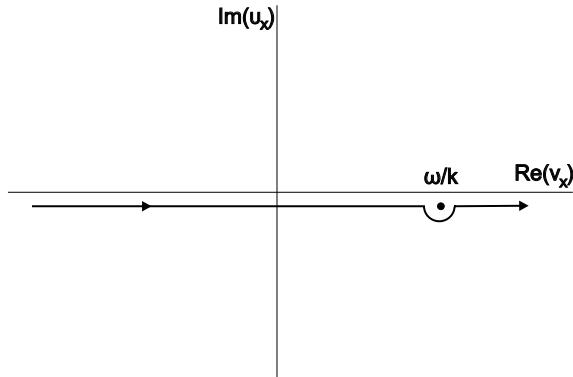
αν θεωρήσουμε ότι $\omega \simeq \omega_e$ (βλ. Σχ. 2). Τα κύματα που περιγράφει η εξίσωση διασποράς (66) είναι τα κύματα πλάσματος που συζητήσαμε ήδη χρησιμοποιώντας τη θεωρία των δύο ρευστών (βλ. Εξ.(46)). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

όταν ω/k είναι μακριά από το v_x τότε οι δύο περίγραφές (των δύο ρευστών και Vlassov-Maxwell) καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Κύματα με φασική ταχύτητα κοντά στην κατανομή των ηλεκτρονίων του πλάσματος (δηλαδή $\omega/k \simeq v_x$), αλληλεπιδρούν με το πλάσμα και η μελέτη του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f_{0e}/\partial v_x)}{\left(\frac{\omega}{k_x} - v_x\right)} dv_x \quad (67)$$

πρέπει να γίνει με προσοχή γιατί υπάρχει ασυνέχεια στο σημείο $\omega/k_x = v_x$. Ο Landau ήταν ο πρώτος που ολοκλήρωσε σωστά την Εξ.(67) και έδωσε τη φυσική σημασία του φαινομένου που φέρει το όνομά του, ‘απόσβεση Landau’ (Landau damping): Αν υποθέσουμε ότι $\omega = \omega_r + i\gamma$, όπου το $|\gamma| \ll \omega_r$, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται γύρω από τον πόλο $v_x = \omega/k$ (Σχ. (3)).



Σχήμα 3: Η ‘καμπύλη του Landau’ όταν $\gamma = 0$. Η ευθεία γραμμή είναι κατά μήκος του άξονα $\text{Re}(v_x)$, ενώ ο πόλος είναι στο σημείο $v_x = \omega/k$.

Η ολοκλήρωση αυτή είναι γνωστή στις μιγαδικές συναρτήσεις και το αποτέλεσμα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{(\partial f_{0e}/\partial v_x)}{\left(\frac{\omega}{k_x} - v_x\right)} = P \left[\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{\partial f_{0e}/\partial v_x}{\left(\frac{\omega}{k_x} - v_x\right)} \right] - i\pi \left. \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_x} \right|_{v_x=\frac{\omega}{k_x}} \quad (68)$$

όπου το πρώτο μέρος του ολοκληρώματος σταματάει λίγο πριν από τον πόλο ($v_x = \omega/k_x$) και συνεχίζει λίγο μετά. Το ολοκλήρωμα αυτό μας δίνει τιμές για

το πραγματικό μέρος της συχνότητας ανάλογες με αυτές που μελετήσαμε ήδη.
Το φανταστικό μέρος της Εξ.(68) περιγράφει την απόσβεση Landau

$$1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \left[1 + 3 \frac{k_x^2 V_e^2}{\omega^2 k_x^2} \right] + i\pi \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \left[\frac{\partial f_{0e}}{\partial v_x} \right]_{v_x=\frac{\omega}{k_x}} = 0$$

θεωρώντας ότι $k_x^2 V_e^2 / \omega^2 \rightarrow 0$ έχουμε

$$(\omega + i\gamma_L)^2 - \omega_e^2 + i\pi \frac{\omega_e^2}{k_x^2} \left[\frac{\partial f_{0e}}{\partial v_x} \right]_{v_x=\frac{\omega}{k_x}} = 0$$

ή

$$\frac{\gamma_L}{\omega_e} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_e^2}{k_x^2} \left[\frac{\partial f_{0e}}{\partial v_x} \right]_{v_x=\frac{\omega}{k_x}}$$

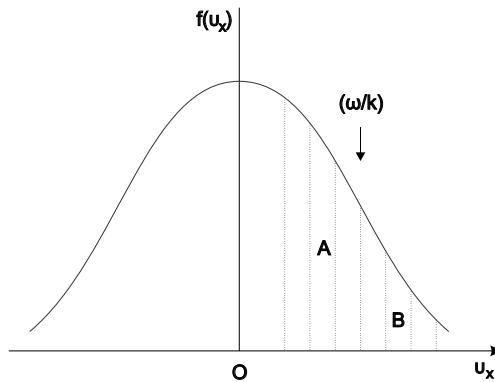
(69)

Αν $\omega \sim \omega_e$, αντικαθιστώντας την f_{e0} με τη συνάρτηση Maxwell έχουμε

$$\frac{\gamma_L}{\omega_e} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-3/2} \left(\frac{\omega_e}{k_x V_e} \right)^{-3} e^{-\frac{\omega_e^2}{2k_x^2 V_e^2}}.$$

(70)

Η απόσβεση των κυμάτων πλάσματος γίνεται ιδιαίτερα έντονη αν $\omega/k_x = \omega_e/k_x = V_e$.



Σχήμα 4: Τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην περιοχή A έχουν ταχύτητα μικρότερη από τη φασική ταχύτητα του κύματος, ενώ για τα φορτία που βρίσκονται στην περιοχή B συμβαίνει το αντίθετο.

Η σημασία αυτής της απόσβεσης μπορεί εύκολα να εξηγηθεί, αν εξετάσουμε προσεκτικά την αλληλεπίδραση του κύματος με φασική ταχύτητα ω/k και των σωματιδίων της κατανομής Maxwell (Σχ. (4)). Επειδή το $\partial f_0/\partial v$ είναι αρνητικό για κύματα με φασική ταχύτητα ω/k , υπάρχουν περισσότερα ηλεκτρόνια που έχουν ταχύτητα $v_x \leq \omega/k$, άρα το κύμα δίνει ενέργεια σ' αυτά, ενώ αντίθετα υπάρχουν λιγότερα ηλεκτρόνια με ταχύτητα $v_x \geq \omega/k_x$, από τα οποία το κύμα κερδίζει ενέργεια. Το αποτέλεσμα είναι το κύμα να χάνει ενέργεια, η οποία μεταφέρεται σε κινητική ενέργεια των φορτίων με τα οποία αλληλεπιδρά.

3.4 Ηλεκτροστατικά κύματα χαμηλής συχνότητας

Η μελέτη των ηλεκτροστατικών κυμάτων χαμηλής συχνότητας ακολουθεί τα ίδια βήματα με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, με τη διαφορά ότι τα ιόντα τώρα μπορούν να παρακολουθήσουν τις ταλαντώσεις χαμηλής συχνότητας, άρα η μάζα τους δεν μπορεί να υπερηφανεύει άπειρη.

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων των δύο ρευστών, έχουμε

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (71)$$

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e = -\vec{\nabla} P_e - e n_e \vec{E} \quad (72)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}_i) = 0 \quad (73)$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} \right) + m_i n_i (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i = -\vec{\nabla} P_i + e n_i \vec{E} \quad (74)$$

$$\nabla \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (75)$$

Χρησιμοποιούμε επίσης την καταστατική εξίσωση $\nabla P_j = \gamma_j k_B T_j \nabla n_j$, όπου $j = e, i$. Η τιμή του γ_e και γ_i εξαρτάται από τη υερμοκρασία, την πυκνότητα και τον κυματόριθμο που θα χρησιμοποιήσουμε, δηλαδή για τα ιόντα που εκτελούν μια σχεδόν αδιαβατική κίνηση σε μία διάσταση το $\gamma_i = 3$, αν όμως οι συγκρούσεις είναι σημαντικές και ανακατανέμουν την ενέργεια σε τρεις διαστάσεις, άλλα η κίνησή τους παραμένει αδιαβατική, τότε $\gamma_i = 5/3$. Για τα ηλεκτρόνια, αν παραμένουν ισόθερμα, $\gamma_e = 1$. Γραμμικοποιώντας τις Εξ.(71)-(75) βρίσκουμε

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{e1} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_{i0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{i1} &= 0 \\ m_e n_{e0} \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} &= -\gamma_e k_B T_e \vec{\nabla} n_{e1} - e n_{e0} \vec{E}_1 \\ m_i n_{i0} \frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} &= -\gamma_i k_B T_i \vec{\nabla} n_{i1} + e n_{i0} \vec{E}_1 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 &= 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}).\end{aligned}$$

Λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητας του πλάσματος υποθέτουμε ότι $n_{e0} = n_{i0} = n_0$. Επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν μικρή, σχετικά με τα ιόντα, μάζα μπορούν εύκολα να παρακολουθούν τις ταλαντώσεις των ιόντων, όταν τα κύματα έχουν χαμηλή συχνότητα ($\omega \rightarrow 0$), άρα $n_{i1} = n_{e1}$ και από τις εξισώσεις συνέχειας προκύπτει ότι $u_{i1} = u_{e1}$.

Είναι φανερό ότι σε αυτή την προσέγγιση η εξίσωση του Poisson δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ότι τα δύο ρευστά ακολουθούν την ταλάντωση του ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x$), άρα το πρόβλημά μας είναι μονοδιάστατο. Με βάση όλες τις παραπάνω προϋποθέσεις προσθέτουμε τις Εξ.(72)-(74) παραγγίζουμε ως προς x , αντικαθιστούμε την παράγωγο ως προς t της Εξ.(71) και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(m_e + m_i) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = (\gamma_e k_B T_e + \gamma_i k_B T_i) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2}$$

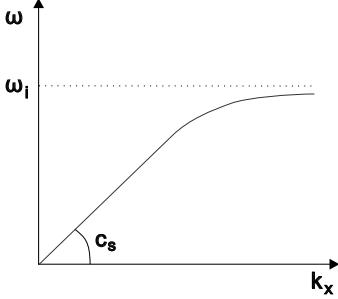
ή

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2},$$

όπου $c_s^2 \equiv (P/\rho) = [\gamma_e k_B T_e + \gamma_i k_B T_i]/[m_e + m_i]$. Υποθέτοντας λύσεις του τύπου επίπεδων κυμάτων η σχέση διασποράς των ηλεκτροστατικών κυμάτων χαμηλής συχνότητας (ιοντακουστικές ταλαντώσεις) είναι

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c_s^2}, \quad (76)$$

που είναι όμοια με την εξίσωση διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στο ιδανικό αέριο (Εξ.(21)).



Σχήμα 5: Γραφική απεικόνιση της σχέσης διασποράς των ιοντακουστικών κυμάτων (για $T_i \rightarrow 0$).

Αν υποθέσουμε ότι η συχνότητα ταλαντωσης γίνεται όλο και μεγαλύτερη, τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν πλέον να παρακολουθήσουν τις ταλαντώσεις των ιόντων, άρα $n_{e1} \neq n_{i1}$. Υποθέτουμε ότι ο όρος $m_e n_{e0} (\partial u_e / \partial t) \cong 0$, γιατί είναι της τάξεως $\sqrt{m_e}$ και $m_e \ll m_i$, άρα από την Εξ.(72) έχουμε

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial x} = -\frac{en_0}{\gamma_e k_B T_e} E_1 \quad (77)$$

για τα ηλεκτρόνια, ενώ για τα ιόντα (χρησιμοποιώντας τις Εξ.(73) και (74))

$$-m_i \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = -\gamma_i k_B T_i \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial x^2} + en_0 \frac{\partial E_1}{\partial x}. \quad (78)$$

Την θέση της λύσης επίπεδου κύματος και κάνοντας χρήση των Εξ.(77) και (78) βρίσκουμε τα n_{e1}, n_{i1} , τα οποία αντικαθιστούμε στην εξίσωση Poisson (75), και υπολογίζουμε τη σχέση διασποράς των ιόντων για ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων

$$\omega^2 = k_x^2 \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{k_x^2 \gamma_e k_B T_e / m_i}{1 + \gamma_e k_x^2 \lambda_{De}^2} = k_x^2 c_s^2 + \frac{k_x^2 \gamma_e V_e (m_e / m_i)}{1 + \gamma_e k_x^2 \lambda_{De}^2} \quad (79)$$

όπου $\lambda_{De}^2 = V_e^2 / \omega_e^2$ = μήκος Debye. Αν υποθέσουμε ότι $k \cong 0$, τότε καταλήγουμε στην Εξ.(76), ενώ αν τα ιόντα είναι ‘ψυχρά,’ $T_i = 0$ και $(k \lambda_{De})^2 \gg 1$, τότε

$$\omega^2 = \frac{k_B T_e / m_i}{\lambda_{De}^2} = \frac{V_e^2 (m_e / m_i)}{\lambda_{De}^2} = \omega_e^2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right) = \omega_i^2$$

όπου $\omega_i = (4\pi n_0 e^2)/m_i$ είναι η συχνότητα πλάσματος των ιόντων. Έχουμε ήδη διευκρινίσει ότι με τη λέξη ‘ψυχρό’ θεωρούμε ότι η φασική ταχύτητα του κύματος είναι πολύ μεγαλύτερη από τη θερμική ταχύτητα του πλάσματος, άρα οι τυχαίες κινήσεις των φορτίων δεν παίζουν ρόλο στην εξίσωση διασποράς ($V_j = 0$).

3.5 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής συχνότητας

Συνεχίζοντας τη μελέτη των πιθανών ταλαντώσεων σε μη μαγνητισμένο πλάσμα εξετάζουμε τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υψηλής συχνότητας. Θεωρούμε ότι οι διαταραχές του μαγνητικού πεδίου δεν είναι αμελητέες και ότι $\vec{B}_1 \neq 0$. Επειδή τα κύματα έχουν υψηλή συχνότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα ιόντα έχουν ‘άπειρη’ μάζα, μιας και δεν μπορούν να παρακολουθήσουν αυτές τις ταλαντώσεις. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι το πλάσμα είναι ‘ψυχρό’ ($T_e = 0$ άρα $P_e = 0$), γιατί η φασική ταχύτητα των κυμάτων είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ενώ η θερμική ταχύτητα $V_e \ll c$. Το σύστημα των εξισώσεων που πρέπει να αναλύσουμε είναι

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla}(n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (80)$$

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e = -en_e \left[\vec{E} + \frac{\vec{u}_e \times \vec{B}}{c} \right] \quad (81)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (82)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (83)$$

και

$$\vec{J} = -en_e \vec{u}_e. \quad (84)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ.(83) ως προς το χρόνο και παίρνοντας τη στροφή της Εξ.(82) έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi e}{c} \frac{\partial}{\partial t} (n_e \vec{u}_e) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (85)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (86)$$

Κρατώντας όρους πρώτης τάξεως στην Εξ.(81) έχουμε ($n_e = n_e + n_{e1}$, $\vec{E} = \vec{E}_1$, $\vec{B} = \vec{B}_1$, $\vec{u}_e = \vec{u}_{e1}$)

$$m_e n_0 \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -en_0 \vec{E}_1. \quad (87)$$

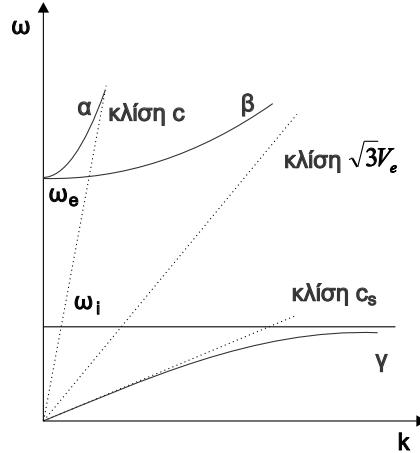
Οι όροι $(\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_e$ και $\vec{u}_e \times \vec{B}$ είναι ανώτερης τάξης. Γραμμικοποιώντας και τις Εξ.(81) και αντικαθιστώντας στην Εξ.(86) την Εξ.(85) και (87) έχουμε

$$-c(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1)) = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e c} \vec{E}_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}. \quad (88)$$

Τυποθέτοντας ότι οι διαταραχές έχουν τη μορφή $e^{i(\tilde{k} \cdot \tilde{r} - \omega t)}$ και ότι $\vec{E}_1 \perp \vec{k}$, καταλήγουμε στη σχέση διασποράς για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής συχνότητας σε μη μαγνητισμένο πλάσμα

$$\omega^2 = \omega_e^2 + c^2 k^2.$$

Στην ίδια εξίσωση καταλήξαμε και όταν χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο του ψυχρού πλάσματος (βλέπε Εξ.(29)). Στο Σχ. (6) παρουσιάζουμε γραφικά τους



Σχήμα 6: Γραφική απεικόνιση των σχέσεων διασποράς για (α) τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, (β) τα κύματα πλάσματος και (γ) τα ιοντακουστικά κύματα (για $T_i = 0$).

κλάδους των τριών δυνατών ταλαντώσεων στο μη-μαγνητισμένο πλάσμα.

Η σχέση διασποράς των ηλεκτροστατικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες. Η ταχύτητα του φωτός στη μία έχει αντικατασταθεί με την ταχύτητα $\sqrt{3}V_e$ στην άλλη.

Ο δείκτης διάθλασης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον προσδιορισμό των οπτικών ιδιοτήτων του πλάσματος. Στο μη μαγνητισμένο πλάσμα παίρνει τη μορφή

$$n \equiv \frac{ck}{\omega} \equiv \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}}.$$

Ο κυματάριθμος k γίνεται φανταστικός όταν $\omega < \omega_e$, και το κύμα αποσβένει εκθετικά ($\exp(i(kr - \omega t))$) όταν διαδίδεται μέσα στο πλάσμα με συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα πλάσματος. Αν το πλάσμα είναι ανομοιογενές, το σημείο στο οποίο ανακλάται ($\omega = \omega_e$) ονομάζεται *κριτική πυκνότητα*. Τα σημεία αυτά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο εργαστηριακό πλάσμα και στην αστροφυσική.

4 Μαγνητούδροδυναμικά κύματα

Οι εξισώσεις τις Μαγνητουδροδυναμικής έχουν ήδη συζητηθεί σε προηγούμενα μαθήματα. Αποτελούν την απλούστερη περιγραφή του πλάσματος. Υποθέτουμε οτι τα ιοντα και ηλεκτρόνια είναι ηλεκτροστατικά συνδεδεμένα και μπορούν να παρασταθούν ως ένα ρευστό. Η υποθεση αυτή είναι καλή προσέγγιση στη περιγραφή του πλασματος αν μελετάμε κύματα χαμηλής συχνότητας. Το πλάσμα υποθέτουμε οτι έχει πυκνότητα ρ , ταχύτητα \vec{u} και πίεση P . Οι εξισώσεις της μαγνητουδροδυναμικής είναι

- Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (89)$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = -\nabla P + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \quad (90)$$

- Καταστατική εξίσωση (αδιαβατική μεταβολή)

$$P = k\rho^{-\gamma} \quad (91)$$

- Γενικευμένος νόμος του Ohm

$$\vec{j} = \sigma \left[E + \frac{u \times B}{c} \right] \quad (92)$$

- Εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (93)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (94)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο τις εξισώσεις της Μαγνητούδροδυναμικής, αν υποθέσουμε ότι (1) το πλάσμα είναι ψυχρό (2) η αγωγιμότητα είναι άπειρη, άρα από το γενικευμένο νόμο του Ohm συμπεραίνουμε ότι επειδή το ρεύμα δεν μπορεί να είναι άπειρο θα πρέπει

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c},$$

και (3) η συχνότητα $\omega \sim 0$. Το νέο σύστημα εξισώσεων που προκύπτει με τις παραπάνω απλουστεύσεις είναι γνωστό ως **Ιδανική Μαγνητούδροδυναμική**.

- Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (95)$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \quad (96)$$

- Εξισώσει Maxwell

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (97)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (98)$$

4.1 Κύματα Alfvén

Αν η κατάσταση ισορροπιας του πλάσματος είναι $\vec{B} = \vec{B}_0, \vec{u}_0 = 0, P = 0, \rho = \rho_0$ και διαταράσσουμε τις ποσότητες αυτές γραμμικά $\vec{u} = \vec{u}_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, από τις εξισώσεις της Ιδανικής Μαγνητοϋδροδυναμικής εχουμε,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right] = \frac{\vec{j}_1 \times \vec{B}_0}{c}$$

$$\nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0) = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1.$$

Αν στη συνέχεια υποθέσουμε ότι όλες οι διαταραχές συμπεριφέρονται ως επί-πεδα κύματα και επιλέξουμε το κύμα να διαδίδεται κατά μήκος του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z, \vec{k} = k \hat{e}_z$, αλλά $\vec{u}_1 = u_1 \vec{e}_y$ και $\vec{B}_1 = B_1 \hat{e}_y$, τότε θα έχουμε,

$$-i\omega \rho_0 u_1 = j_1 B_0 / c \quad (99)$$

$$ikB_1 = \frac{4\pi}{c} j_1 \quad (100)$$

$$iku_1 B_0 = -i\omega B_1 \quad (101)$$

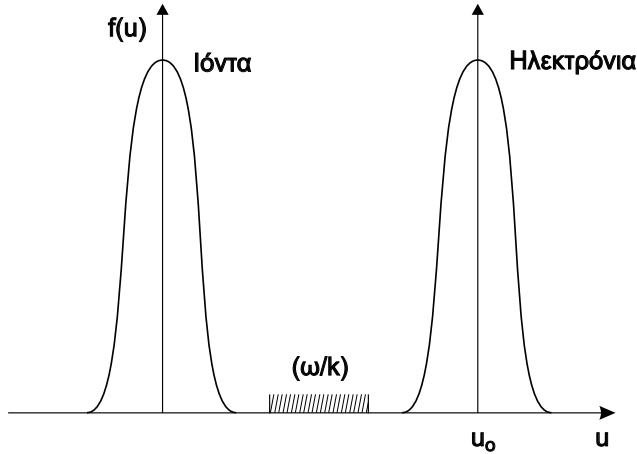
Λύνοντας την Εξ. (100) ως πρός j_1 και την Εξ. (101) ως προς B_1 και αντικαθιστώντας στην Εξ. (99) καταλήγουμε στη σχέση

$$[\omega^2 - k^2 v_A^2] u_1 = 0,$$

όπου $v_A = B_0 / (4\pi\rho_0)^{1/2}$ = ταχύτητα Alfvén. Για να είναι η διαταραχή της ταχύτητας διάφορη του μηδενός θα πρέπει

$$\boxed{\omega^2 - k^2 v_A^2 = 0.} \quad (102)$$

Τα κύματα αυτά είναι γνωστά ως κύματα Alfvén και διαδίδονται παράλληλα προς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 7: Τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση ταχύτητα u_0 σχετικά με τα ιόντα.

5 Αστάθειες στο πλάσμα

5.1 Αστάθεια των διπλών ροών

Ας μελετήσουμε πρώτα την αστάθεια που προκαλεί η απομάκρυνση των ιόντων από τα ηλεκτρόνια στο χώρο των ταχυτήτων (Σχ. 7). Υποθέτουμε ότι το πλάσμα είναι ομογενές και εκτείνεται στο άπειρο. Τα ιόντα είναι ακίνητα (μέση ταχύτητα ιόντων μηδέν), ενώ τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση σταθερή ταχύτητα u_0 και τα εξωτερικά πεδία είναι μηδέν ($B_0 = E_0 = 0$). Θα μελετήσουμε τη διέγερση ηλεκτροστατικών κυμάτων με φασική ταχύτητα $0 << \omega_r/k << u_0$ (γραμμοσκιασμένη περιοχή στο Σχ. 7). Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα είναι ‘ψυχρά’, γιατί η θερμική τους ταχύτητα είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ρευστού ($V_j << u_0$). Με βάση όλες τις παραπάνω απλουστεύσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μελέτη της ευστάθειας ή αστάθειας των ηλεκτροστατικών ταλαντώσεων μπορεί να γίνει με τις εξισώσεις των δύο ρευστών. Γραμμικοποιώντας τις Εξ.(31)-(34) και Εξ.(35) και παίρνοντας υπόψη ότι το u_0 είναι ανεξάρτητο του (x, t) , ενώ το $u_{0i} = 0$, έχουμε για μονοδιάστατη κίνηση

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_{e1}}{\partial x} + u_0 \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} = 0 \quad (103)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial u_{e1}}{\partial t} + m_e n_0 u_0 \frac{\partial u_{e1}}{\partial x} = -en_0 E_1 \quad (104)$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_{i1}}{\partial x} = 0 \quad (105)$$

$$m_i n_0 \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} = e n_0 E_1 \quad (106)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = 4\pi e(n_{i1} - n_{e1}). \quad (107)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές n_{e1} , n_{i1} , E_1 , u_{i1} , u_{e1} έχουν τη μορφή $s = s_0 \exp(i(kx - \omega t))$, τότε η σχέση διασποράς προκύπτει από τη λύση των Εξ.(103)-(107) και παίρνει τη μορφή

$$1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2}{(\omega - ku_0)^2} = 0. \quad (108)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\omega = \omega_r + i\gamma$. Αν η συχνότητα έχει φανταστικό μέρος θετικό, τα κύματα με χαρακτηριστική συχνότητα ω_r αναπτύσσονται εκθετικά.

Εάν στην εξίσωση διασποράς Εξ.(108) θεωρήσουμε ότι τα ιόντα έχουν άπειρη μάζα ($m_i \rightarrow \infty$, άρα $\omega_i \rightarrow 0$), τότε $\omega = ku_0 \pm \omega_e$. Για m_i πεπερασμένη η σχέση διασποράς είναι εξίσωση τέταρτης τάξης και θα τη μελετήσουμε γραφικά στη συνέχεια. Μπορούμε όμως να αναζητήσουμε προσεγγιστικές λύσεις, όταν η συχνότητα των κυμάτων είναι χαμηλή, ώστε να συμμετέχουν στην κίνηση τα ιόντα, άρα υποθέτουμε $\omega_i << \omega << \omega_e$. Έτσι, ο δεύτερος όρος στην Εξ.(108) είναι περίπου μηδέν, άρα ο τρίτος όρος πρέπει να είναι περίπου 1, άρα $\omega_e \simeq ku_0$. Σε αυτή την προσέγγιση, θέτοντας $\omega_e = ku_0$, η σχέση διασποράς απλοποιείται

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2}{(\omega - \omega_e)^2} \\ &= 1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{1}{(1 - \omega/\omega_e)^2} \\ &\simeq 1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \left(1 + \frac{2\omega}{\omega_e}\right) \\ &= -\frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{2\omega}{\omega_e} \end{aligned}$$

ή

$$\boxed{\frac{\gamma_s}{\omega_e} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_i^2}{\omega_e^2}\right)^{1/3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}}, \quad (109)$$

η οποία αντιπροσωπεύει αστάθεια, γιατί μια από τις τρεις τιμές του $(-1)^{1/3}$ είναι $(1/2) + i(3^{1/2}/2)$. Η εμφάνιση μιγαδικού μέρους στη συχνότητα σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις του ηλεκτρικού πεδίου έχουν τη μορφή $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$, και όταν το $\omega = \omega_r + i\gamma$ έχουμε $E = (E_0 e^{\gamma t}) e^{i(kx - \omega_r t)}$. Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι, αν το γ είναι θετικό, το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου συνεχώς αυξάνει, άρα το πλάσμα είναι ασταθές.

Στο σύστημα αναφοράς των κινουμένων ηλεκτρονίων η συχνότητα του κύματος είναι $\omega' = \omega - ku_0 \simeq -\omega_e$ (επειδή το $ku_0 = \omega_e$ και $\omega \ll \omega_e$), άρα το πραγματικό μέρος της συχνότητας ταλάντωσης είναι περίπου η συχνότητα πλάσματος.

Το ερώτημα λοιπόν είναι: 'Εχει μιγαδικές λύσεις η σχέση διασποράς (Εξ.(108)) και, αν ναι, ποιές από αυτές τις λύσεις έχουν φανταστικό μέρος θετικό;

Η Εξ.(108) είναι τέταρτου βαθμού ως προς τη συχνότητα και, αν υποθέσουμε ότι το $x = \omega/\omega_e$ και το $y = ku_0/\omega_e$, τότε παίρνει τη μορφή

$$F(x, y) \equiv \frac{(m_e/m_i)}{x^2} + \frac{1}{(x - y)^2} = 1. \quad (110)$$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (5.23) φαίνεται στα Σχήματα (8α) και (8β) για διαφορετικές παραμέτρους (y). Από το $\Sigma\chi.$ (8α) παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, ενώ στο $\Sigma\chi.$ (8β) έχει δύο πραγματικές και δύο φανταστικές, άρα το πλάσμα είναι ασταθές. Προϋπόθεση για να εμφανιστεί ένα φανταστικό μέρος είναι

$$F_{\min}(x, y) > 1 \quad (111)$$

όπου το $F_{\min}(x, y)$ υπολογίζεται από τη σχέση $(\partial F / \partial x) = 0$. Από την Εξ.(110) υπολογίζουμε (για $x \ll y$, βλ. Σχ. 8, δηλαδή $\omega \ll ku_0$)

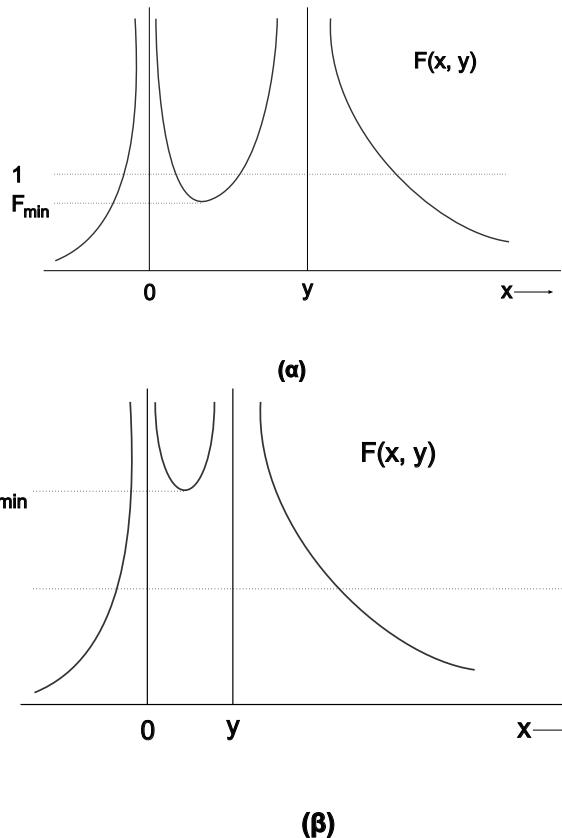
$$\omega_{\min} \cong \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} ku_0$$

(112)

και

$$F_{\min} \cong \frac{\omega_i^2}{(m_e/m_i)^{2/3} k^2 u_0^2} + \frac{\omega_e^2}{k^2 u_0^2}.$$

Η F_{\min} γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας αν



Σχήμα 8: (α) Το πλάσμα είναι ευσταθές, γιατί υπάρχουν τέσσερις πραγματικές ρίζες, (β) το πλάσμα είναι ασταθές γιατί υπάρχουν δύο πραγματικές και δύο μιγαδικές λύσεις.

$$|ku_0| \leq \omega_e.$$

Υπάρχει μια αρκετά μεγάλη περιοχή κυματαριθμών

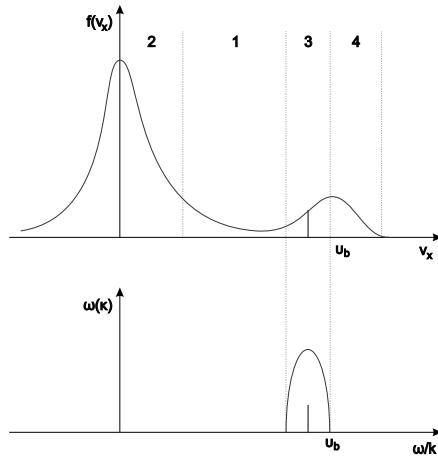
$$-\omega_e/u_0 < k < \omega_e/u_0,$$

για την οποία τα κύματα είναι ασταθή.

Οι αστάθειες διπλής ροής είναι πολύ συνηθισμένες στη φύση. Η γραμμική ανάλυση της αστάθειας είναι αρκετά απλή και ήταν γνωστή από τη δεκαετία του 60, η μη γραμμική της συμπεριφορά όμως, παρά τις προσπάθειες που έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια, δεν έχει ακόμη κατανοηθεί πλήρως.

5.2 Ασταθεια πλάσματος-δέσμης

Η αστάθεια πλάσματος-δέσμης ηλεκτρονίων ανήκει στην κατηγορία των ασταθειών ροής. Οι αστάθειεις που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο βασίζονται κυρίως στη μέση ταχύτητα των δύο ρευστών και δεν εξαρτώνται από τις λεπτομέρειες της συνάρτησης κατανομής. Στο παρόντα γράμμα που μελετήσαμε ήδη υποθέσαμε ότι οι θερμοκρασίες των ηλεκτρονίων και ιόντων ήταν μηδέν (προσέγγιση ‘ψυχρού’ πλάσματος). Ένα είδος αστάθειας που δεν μπορεί να μελετηθεί με τις εξισώσεις του ρευστού είναι οι αστάθειεις που προκαλεί μια δέσμη ηλεκτρονίων με θερμοκρασία διάφορη του μηδενός που διαδίδεται μέσα στο πλάσμα. Στο Σχ. 9 φαίνεται το φυσικό σύστημα που θέλουμε να μελετήσουμε. Τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα του πλάσματος έχουν μέση ταχύτητα



Σχήμα 9: Η συνάρτηση κατανομής πλάσματος-δέσμης. Η δέσμη κινείται με ταχύτητα v_b . Υπάρχουν τέσσερις περιοχές στο χώρο των ταχυτήτων που τα κύματα συμπεριφέρονται διαφορετικά.

μηδέν, αλλά η θερμοκρασία τους είναι $T_e \neq T_i \neq 0$. Μία δέσμη ηλεκτρονίων με ταχύτητα $v_x = v_b$ (ενώ $v_y = v_z = 0$) διαδίδεται μέσα στο πλάσμα. Το σύστημα είναι ομογενές και τα εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικό πεδία είναι ίσα με το μηδέν. Θα μελετήσουμε με βάση τις εξισώσεις Vlassov - Maxwell τις αστάθειεις των ηλεκτροστατικών κυμάτων υψηλής συχνότητας αυτού του συστήματος. Η συνάρτηση κατανομής των φορτίων υποθέτουμε ότι είναι μονοδιάστατη ($f_j(v_x) = \int f_j dv_y dv_z$) και έχει τη μορφή

$$f_e(v_x) = f_{0e}(v_x) + f_{be}(v_x)$$

και

$$f_i(v_x) = f_{0i}(v_x)$$

όπου

$$f_{0j} = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}V_j} \exp \left[-\frac{v_x^2}{2V_j^2} \right]$$

είναι η συνάρτηση κατανομής Maxwell για τα ηλεκτρόνια ($j = e$) και τα ιόντα ($j = i$), n_0 είναι η πυκνότητα του πλάσματος και V_j είναι η θερμική ταχύτητα. Η κατανομή των ηλεκτρονίων της δέσμης δίνεται από τη σχέση

$$f_{be}(v_x) = \frac{n_b}{\sqrt{2\pi}V_{eb}} \exp \left[-\frac{(v_x - v_b)^2}{2V_{eb}^2} \right],$$

όπου n_b είναι η πυκνότητα της δέσμης ($n_b \ll n_0$) και V_{eb} η θερμική ταχύτητα της δέσμης. Υποθέσαμε άρα ότι η συνάρτηση κατανομής της δέσμης των ηλεκτρονίων μπορεί να προσεγγισθεί με τη 'μετατοπισμένη' κατανομή Maxwell.

Με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που αναφέραμε αναλυτικά για τον υπολογισμό της σχέσης διασποράς, δηλαδή γραμμικοποιούμε πρώτα τις εξισώσεις Vlassov - Maxwell, θεωρώντας ότι όλες οι μεταβλητές παίρνουν τη μορφή $s = s_0 + s_1$, και στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η διαταραχή έχει τη μορφή $s_1 = s_{10}e^{i(kx-\omega t)}$, αλλά τώρα ότι το $\omega = \omega_r + i\gamma$, όπου $|\gamma| \ll |\omega_r|$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το φανταστικό μέρος της συχνότητας είναι πολύ μικρότερο από το πραγματικό, για να μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γραμμική προσέγγιση που αναφέραμε ήδη. Αν το φανταστικό μέρος είναι ίσο με το πραγματικό δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ένα αργά μεταβαλλόμενο κύμα και πρέπει να προχωρήσουμε κατευθείαν στη μη-γραμμική ανάλυση.

Γραμμικοποιώντας στη συνέχεια τις εξισώσεις Vlassov και Poisson έχουμε

$$1 - \frac{\omega_e^2}{n_0 k^2} \int dv_x \frac{(\partial f_{e0}/\partial v_x)}{v_x - (\omega/k)} - \frac{\omega_b^2}{n_b k^2} \int dv_x \frac{(\partial f_b/\partial v_x)}{v_x - (\omega/k)} = 0 \quad (113)$$

όπου $\omega_b = (4\pi e^2 n_b / m_e)^{1/2}$. Η Εξ.(113) καταλήγει στην Εξ.(63), αν η πυκνότητα της δέσμης είναι μηδέν. Είναι φανερό από τη μορφή των ολοκληρωμάτων ότι τρεις περιοχές φασικών ταχυτήτων έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Αναλύοντας την εξίσωση διασποράς Εξ.(113) ωραία λέγουμε υπόψη ότι η πυκνότητα της δέσμης είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα του πλάσματος και ότι το πραγματικό μέρος της συχνότητας ωραία καθορίζεται από το πλάσμα, που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία (f_0), ενώ το φανταστικό μέρος της συχνότητας προσδιορίζεται από τη δέσμη των ηλεκτρονίων (f_b).

5.2.1 Η ‘ψυχρή δέσμη’

Μελετάμε πρώτα κύματα με φασική ταχύτητα μακριά και από τις δυο κατανομές (βλέπε Σχ. 9, περιοχή 1). Σε αυτή την περίπτωση $V_e \ll \omega/k \ll V_b$, και η δέσμη έχει αμελητέα συνεισφορά στο πραγματικό μέρος της συχνότητας.

$$\omega_r^2 = \omega_e^2 + 3kV_e^2.$$

Για ψυχρή δέσμη και ψυχρό πλάσμα, τα κύματα με φασική ταχύτητα στη περιοχή 1 μπορούν να μελετηθούν με την κατανομή

$$f_e = n_0\delta(v_x) + n_b\delta(v_x - v_b) \quad (114)$$

γιατί η θερμική διασπορά δεν παίζει σημαντικό ρόλο. Η σχέση διασποράς υπολογίζεται από τη σχέση

$$1 - \frac{\omega_e^2}{n_0 k^2} \int dv_x \frac{f_e}{(\frac{\omega}{k} - v_x)^2} = 0$$

ή

$$1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} = 0, \quad (115)$$

ανάλογα με την Εξ.(108), και ο ρυθμός ανάπτυξης μονοενεργειακής δέσμης είναι (η ανάλυση ακολουθεί τη μεθοδολογία της παραγράφου 5.1, αν στη θέση της $\omega_e \rightarrow \omega_b$ και $\omega_i \rightarrow \omega_e$, βλ. Εξ.(109))

$$\gamma_{\max} \simeq \frac{3^{1/2}}{2} \left(\frac{n_b}{n_0} \right)^{1/3} \omega_e$$

(116)

και $\omega_r \simeq \omega_e \pm kV_b$. Το σύστημα πλάσμα-δέσμη συμπεριφέρεται διαφορετικά στην περιοχή (3) αλλά και στην (1), όταν δεν ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{1/3} >> \frac{V_{eb}}{v_b}, \quad (117)$$

επειδή τότε δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τη θερμική διασπορά της δέσμης. Μόνο πολύ ασθενείς δέσμες μπορούν να προσεγγισθούν με τη συνάρτηση κατανομής Εξ.(114).

5.2.2 Αστάθεια Πλάσματος-Θερμής Δέσμης

Ας δούμε τέλος την περιοχή 3 στο Σχ. 9 όταν το $n_b \neq 0$. Τα φορτία της δέσμης αλληλεπιδρούν με τα κύματα, άρα ο σημαντικότερος πόλος είναι για $\omega/k \simeq v_b$. Στην εξίσωση διασποράς Εξ.(113) το πρώτο ολοκλήρωμα το έχουμε ήδη μελετήσει (κύματα με ταχύτητα φάσεως $(\omega/k) \gg V_e$) και το αποτέλεσμα είναι η γνωστή μας σχέση διασποράς (Εξ.(63)). Το πραγματικό μέρος του δευτέρου ολοκληρώματος είναι αμελητέο, γιατί $n_b \ll n_0$. Η δέσμη συνεισφέρει μόνο στο φανταστικό μέρος του δεύτερου ολοκληρώματος στην Εξ.(113): με τη βοήθεια της Εξ.(69), αν αντικαταστήσουμε την κατανομή Maxwell με την κατανομή της δέσμης, παίρνουμε

$$\gamma_b = \pi \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_e}{k}\right)^2 \omega_e \left[\frac{\partial f_{be}}{\partial v_x} \right]_{v_x=\frac{\omega}{k}}.$$

Είναι φανερό ότι τα κύματα με φασική ταχύτητα $\omega/k < v_b$ θα είναι ασταθή. Το ηλεκτροστατικό κύμα θα περιγράφεται από τη σχέση

$$E(x) = (E_0 e^{\gamma_b t}) e^{i(kx - \omega_r t)},$$

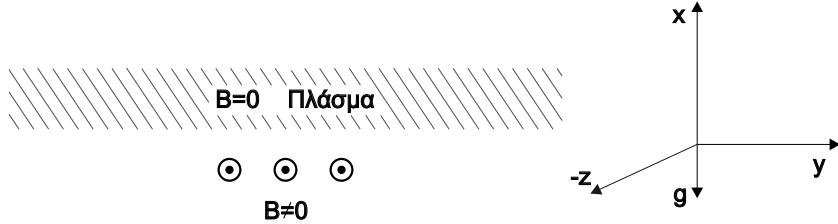
όπου $\omega_r = \omega_e + 3/2 k V_e$, και

$$\boxed{\gamma_b = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{n_b}{n_0}\right) \omega_e \left(\frac{v_b}{V_{eb}}\right)^2}$$

(118)

όπου το $(\omega/k) \simeq v_b$ και το $v_b >> V_{eb}$.

Η δέσμη ηλεκτρονίων αναγκάζει όλα τα κύματα που έχουν φασική ταχύτητα στην περιοχή 3 να αναπτύσσονται εκθετικά στο χρόνο. Το αντίθετο συμβαίνει φυσικά για κύματα που βρίσκονται στην περιοχή 4. Η ενέργεια που τυχόν έχουν αυτά τα κύματα απορροφάται από τη δέσμη των ηλεκτρονίων.



Σχήμα 10: Το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές κατά μήκος του άξονα \vec{e}_z ενώ το πλάσμα είναι ασυνεχές $\vec{\nabla}n \neq 0$ ($n \neq 0$ μόνο για $x < 0$). Το πεδίο βαρύτητας διευθύνεται κατά μήκος του \vec{e}_x .

5.3 Βαρυτικές αστάθειες

Παρά πολύ συχνά, στο εργαστήριο ή στο διαστημικό χώρο δημιουργούνται ασυνέχειες στην πυκνότητα του πλάσματος. Στο Σχ. 10 θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και έχει τη διεύθυνση του άξονα z . Η ασυνέχεια $\vec{\nabla}n$ έχει διεύθυνση $-\vec{e}_x$ αντίθετη από τη διεύθυνση της βαρύτητας $\vec{g} = -g\vec{e}_x$, και για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα θεωρήσουμε ότι $T_e = T_i = 0$. Το σύστημα που περιγράψαμε είναι μία μεταφορά της Rayleigh-Taylor αστάθειας στο πλάσμα γιατί το ‘ελαφρύ’ υγρό είναι το μαγνητικό πεδίο.

Η παρουσία της δύναμης βαρύτητας κάθετα στο μαγνητικό πεδίο αναγκάζει τα ηλεκτρόνια και ιόντα να ολισθαίνουν με αντίθετες ταχύτητες (βλέπε Βλάχος (2001) σελίδα 22). Στην κατάσταση ισορροπίας τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια θα κινούνται με την ταχύτητα ολίσθησης

$$\vec{v}_{0i} = \frac{cm_i}{e} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_i} \vec{e}_y, \quad (119)$$

$$\vec{v}_{0e} = +\frac{cm_e}{e} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B_0^2} = +\frac{g}{\Omega_e} \vec{e}_y, \quad (120)$$

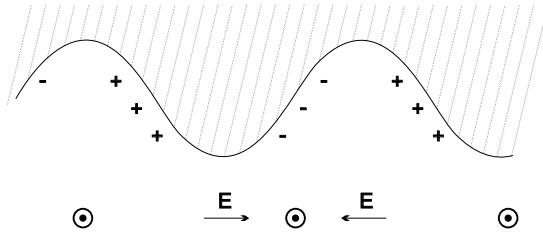
Τα ηλεκτρόνια θα τα θεωρήσουμε ακίνητα, γιατί $m_e \ll m_i$, και από την Εξ.(120) συμπεραίνουμε για τα ηλεκτρόνια $\vec{v}_{0e} \cong 0$.

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων κίνησης και συνέχειας των δύο ρευστών και ακολουθώντας τα γνωστά βήματα της γραμμικοποίησης, έχουμε για τα ιόντα (η συνεισφορά της δύναμης $m_i \vec{g}$ είναι αμελητέα στην εξίσωση κίνησης των ιόντων, αλλά η παρουσία της γίνεται αισθητή μέσα από την ταχύτητα \vec{v}_{0i} (βλ. Εξ.(119)).

$$m_i n_0 \left[\frac{\partial v_{1i}}{\partial t} + (\vec{v}_{0i} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{1i} \right] = e n_0 \left[\vec{E}_1 + \frac{\vec{v}_{1i} \times \vec{B}_0}{c} \right] \quad (121)$$

και για τα ηλεκτρόνια από την εξίσωση συνέχειας ($\vec{v}_{0e} = 0$)

$$\frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + (\vec{v}_{1e} \cdot \vec{\nabla} n_0) = 0. \quad (122)$$



Σχήμα 11: Διαταραχή της πυκνότητας στην επιφάνεια $x = 0$ του Σχήματος 10.

Εάν μελετήσουμε κύματα χαμηλής συχνότητας, και επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν μικρή μάζα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ακολουθούν τις διαταραχές των ιόντων, $n_{e1} = n_{i1} = n_1$. Η Εξ.(121) παίρνει τη μορφή, για κύματα που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση \vec{e}_y ,

$$m_i(\omega - kv_{0i})\vec{v}_{1i} = ie \left(\vec{E}_1 + \frac{\vec{v}_{1i} \times \vec{B}_0}{c} \right). \quad (123)$$

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (123), αν υποθέσουμε ότι $E_{1x} = 0$ και $(\omega - kv_0)^2 \ll \Omega_i^2$ (βλέπε Σχήμα 11, που περιγράφει το φυσικό μηχανισμό της βαρυτικής αστάθειας) και έχουμε

$$E_{1y} = \frac{v_{1ix} B_0}{c}$$

η

$$v_{1ix} = \frac{E_y c}{B_0} \quad (124)$$

$$v_{1iy} = -i \frac{\omega - kv_{0i}}{\Omega_i} v_{1ix} = -i \frac{\omega - kv_{0i}}{\Omega_i} \frac{E_y c}{B_0}. \quad (125)$$

Οι αντίστοιχες ποσότητες για τα ηλεκτρόνια είναι $v_{1\text{ex}} = cE_y/B_0$, αλλά $v_{1\text{ey}} = 0$, όταν $\omega \ll \Omega_e$. Από την εξίσωση συνέχειας των ιόντων έχουμε

$$-i\omega n_1 + ikv_{0i}n_1 + v_{1\text{ix}} \left(\frac{dn_0}{dx} \right) + ikn_0v_{1\text{iy}} = 0 \quad (126)$$

και από την εξίσωση συνέχειας των ηλεκτρονίων

$$-i\omega n_1 + v_{1\text{ex}} \left(\frac{dn_0}{dx} \right) = 0. \quad (127)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ.(126) και (127) και χάνοντας χρήση των Εξ. (124) και (125) έχουμε

$$\omega^2 - kv_{0i}\omega - g(dn_0/dx)/n_0 = 0$$

και η λύση είναι

$$\omega = \frac{1}{2}kv_0 \pm \left[\frac{1}{4}k^2v_{0i}^2 + g \left(\frac{dn_0}{dx} \right) \frac{1}{n_0} \right]^{1/2}.$$

Εάν το $-g(dn_0/dx)/n_0 > k^2v_{0i}^2/4$, το πλάσμα είναι ασταθές, και για k πολύ μικρό, το φανταστικό μέρος της συγχρότητας είναι

$$\gamma_g = \left[-g \left(\frac{dn_0}{dx} \right) \frac{1}{n_0} \right]^{1/2}. \quad (128)$$

Είναι φανερό ότι για να υπάρχει αστάθεια, η κλίση της πυκνότητας $\vec{\nabla}n_0$ πρέπει να έχει φορά αντίθετη προς τη διεύθυνση της βαρύτητας. Στο Σχήμα 11 παρακολουθούμε μία διαταραχή της πυκνότητας. Τα ιόντα κινούνται με την ταχύτητα ολίσθησης v_0 προς τη διεύθυνση $-\vec{e}_y$ και αυτόματα δημιουργούνται τα ηλεκτρικά πεδία E_{1y} που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση. Η παρουσία του E_{1y} συνδυασμένη με το μαγνητικό πεδίο δημιουργεί μία πρόσθετη δύναμη $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ που αναγκάζει το πλάτος της ταλάντωσης να αναπτυχθεί περισσότερο, όπα το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει (αστάθεια).

6 Συμπεράσματα

Στο μάθημα αυτό παρουσιάσαμε περιληπτικά τις προϋποθέσεις για την ύπαρξη και διάδοση ηλεκτροστατικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα.

Αναφερθήκαμε ιδιαίτερα:

- Στα ηλεκτροστατικά κύματα πλάσματος σε μη μαγνητισμένο πλάσμα

$$\omega^2 = \omega_e^2 + 3k^2 V_e^2$$

- Στα ηλεκτροστατικά κύματα χαμηλής συχνότητας απουσία μαγνητικού πεδίου

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 + \frac{\gamma_e k^2 (k_B T_e / m_i)}{1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2}$$

- Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_e^2$$

- Στα κύματα Alfvén

$$\omega^2 = k V_A^2$$

Δώσαμε ιδιαίτερη έμφαση στο ‘πρότυπο’ που θα στηριχθούμε για να αναλύσουμε τις κανονικές ταλαντώσεις του πλάσματος (το πρότυπο των δύο ρευστών, τις κινητικής θεωρίας, της μαγνητουδροδυναμικής).

Τα κύματα που αναφέραμε μπορούν να διεγερθούν αν το πλάσμα βρίσκεται μακριά από την θερμοδυναμική ισορροπία. Η μέθοδος ανάλυσης στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι η συχνότητα του πλάσματος μπορεί να είναι μιγαδική $\omega = \omega_r + i\gamma$ αλλά και στο ότι το φανταστικό μέρος είναι πολύ μικρότερο από το πραγματικό $\omega_r \gg \gamma$. Τα ηλεκτροστατικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα αναπτύσσονται με ρυθμούς

$$A = A_0 e^{\gamma t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$

άρα αν $\gamma > 0$ το πλάτος του κύματος αυξάνει (αστάθεια) ενώ αν $\gamma < 0$ ελαττώνεται με τη πάροδο του χρόνου (απόσβεση).

Αναλύσαμε μερικές μόνο χαρακτηριστικές αποσβέσεις/αστάθειες,

- Την απόσβεση Landau

$$\gamma_L/\omega_e = -\sqrt{\pi/8} \exp(-3/2) \left(\frac{\omega_e}{kV_e} \right)^{-3} \exp \left[-\frac{\omega_e^2}{2k^2 V_e^2} \right]$$

- Την αστάθεια των διπλών ροών

$$\gamma_s/\omega_e = \left(-\frac{1}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega_i^2}{\omega_e^2} \right)^{1/3} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}$$

- Την αστάθεια της 'ψυχρής' και θερμής δέσμης

$$\gamma_{cb} = \frac{3^{1/2}}{2} \left(\frac{n_b}{n_0} \right)^{1/3} \omega_e$$

$$\gamma_b = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{n_b}{n_0} \right) \omega_e \left(\frac{v_b}{V_{eb}} \right)^2$$

- Την αστάθεια της βαρύτητας

$$\gamma_{gr} = \left[-g \left(\frac{dn_0}{dx} \right) \frac{1}{n_0} \right]^{1/2}$$

Μια ολοκληρωμένη εικόνα των θεμάτων που αναφέραμε στο μάθημα αυτό θα βρείτε στα βιβλία που παραθέτουμε στη βιβλιογραφία.

Ευχαριστίες: Θα ήθελα από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω τους συνεργάτες μου Κάλλια Πετράκη, Βαγγέλη Σιμόνο, Τάσσο Φράγγο και Μανού Ράντζιου για τις παρατηρήσεις τους στη πρώτη γραφή αυτού του μαθήματος.

Αναφορές

- [1] Baumjohann, W. and Treumann, R., (1997), 'Basic Space Plasma Physics', Imperial College Press.
- [2] Bateman, G. (1987). 'MHD Instabilities'. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- [3] Βλάχος, Λ. (2001), 'Φυσική Πλάσματος: Η τέταρτη κατάσταση της ύλης', Θεσσαλονίκη: Εκδ. Τζιόλα.

- [4] Chen, F.F. (1984), ‘Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Vol. 1: Plasma Physics’, New York: Plenum Press.
- [5] Davidson, R.C. (1972), ‘Methods in Nonlinear Plasma Theory’, New York: Academic Press.
- [6] Denby, R.O., (1990), ‘Plasma Dynamics’, Oxford Science Publications.
- [7] Galeev, A.A. and Sudan, R.N. (1983), ‘Basic Plasma Physics, vol. I and II’, Amsterdam: North Holland.
- [8] Ichimaru, S. (1973), ‘Basic Principles of Plasma Physics’, Reading Mass.: W.A. Benjamin Inc.
- [9] Ichimaru, S. (1986), ‘Plasma Physics: An Introduction to Stochastical Physics of Charged Particles’, California: Benjamin.
- [10] Krall, N.A. and Trivelpiece, A.W. (1973), ‘Principles of Plasma Physics’, New York: McGraw-Hill.
- [11] Lifshitz, E.M. and Pitaevskii, L.P. (1981), ‘Physical Kinetics’, Oxford: Pergamon Press.
- [12] Mikhailovskii, A.B. (1974a), ‘Theory of Plasma Instabilities, vol. 1, Instabilities of a Homogeneous Plasma’, New York: Consultants Bureau.
- [13] Mikhailovskii, A.B. (1976b), ‘Theory of Plasma Instabilities, vol. 2, Instabilities of an Inhomogeneous Plasma’, New York: Consultants Bureau.
- [14] Nocholson, D.R., 1983, ‘Introduction to plasma theory’, New York: Willey.
- [15] Schmidt. G. (1966), ‘Physics of High Temperature Plasmas’, New York: Academic Press.
- [16] Stix, T., (1962), ‘The theory of plasma waves’, New York, McGraw-Hill.
- [17] Sturrock, P., (1994), ‘Plasma Physics’, Cambridge University Press.