

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Τί είναι και πού συναντάμε το πλάσμα

Ο όρος πλάσμα (plasma) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1929 από τους Tonks και Langmuir για να περιγράψουν το ιονισμένο αέριο μιας ηλεκτρικής εκκένωσης. Από τότε ο όρος αυτός επικράτησε για κάθε αέριο, του οποίου τουλάχιστον ένα ποσοστό των ατόμων ή μορίων του είναι μερικά ή ολικά ιονισμένο.

Ένα αέριο μπορεί να ιονισθεί με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, στο στέμμα ενός αστέρα ο ιονισμός οφείλεται στις συγκρούσεις των ατόμων μιάς και η θερμοκρασία του αερίου φτάνει τα $10^6 - 10^7$ K (θερμικός ιονισμός). Εξάλλου, ο ιονισμός των πλανητικών ατμοσφαιρών προκαλείται από την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας, από τον Ήλιο και τους αστέρες, με τα άτομα (φωτοϊονισμός). Το πλάσμα στην ατμόσφαιρα των αστέρων νετρονίων αποτελείται από ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια που δημιουργούνται κατά το φαινόμενο της δίδυμης γένεσης, δηλαδή, από την αλληλεπίδραση φωτονίων με ενέργεια $E \geq 2m_e c^2$ (ακτίνων-γ), όπου m_e είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και c η ταχύτητα του φωτός, με τα ισχυρά ηλεκτρομαγνητικά πεδία των περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Στην επιφάνεια της Γης το πλάσμα σπανίζει, ενώ αντίθετα, αν απομακρυνθούμε από την επιφάνεια της Γης, συναντάμε την ιονόσφαιρα, τη μαγνητόσφαιρα και τον ηλιακό άνεμο που αποτελούνται από πλάσμα.

Η αλματώδης ανάπτυξη της φυσικής του πλάσματος τα τελευταία σαράντα χρόνια οφείλεται στην προσπάθεια παγίδευση πλάσματος με υψηλή θερμοκρασία (10^8 K) και πυκνότητα (10^{15} cm^{-3}) μέσα σε ειδικούς αντιδραστήρες με σκοπό την έναρξη και διατήρηση της πυρηνικής σύντηξης. Η σύντηξη πυρήνων δευτερίου (^2H) και τριτίου (^3H) έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νετρονίων με μέση ενέργεια 14.1 MeV ($1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} = 11605 \text{ K}$). Η ενέργεια των νετρονίων μπορεί να μετατραπεί σε θερμική ενέργεια με απόδοση μέχρι και 40%. Μέχρι σήμερα, καμιά μηχανή παγίδευσης πλάσματος δεν έχει πετύχει συνθήκες που να επιτρέπουν την παραγωγή άφθονης και φτηνής ενέργειας και αυτό το θέμα παραμένει

ανοιχτό. Θα ήταν άστοχο να συνδέσουμε την ανάπτυξη αυτού του νέου κλάδου της φυσικής μόνο με τις εργαστηριακές εφαρμογές του. Το 99% του σύμπαντος βρίσκεται σε κατάσταση πλάσματος. Έτσι, η γνώση των ιδιοτήτων και της συμπεριφοράς του πλάσματος είναι απαραίτητη τόσο για τη μελέτη του διαστημικού χώρου κοντά στη Γη, όσο και στο ηλιακό σύστημα και στα διάφορα αστροφυσικά αντικείμενα, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η φυσική του πλάσματος είναι μια από τις βασικές επιστήμες, η οποία θα μας βοηθήσει στην κατανόηση των περισσότερων φαινομένων στο σύμπαν.

Ας δούμε όμως αναλυτικά τους τρόπους δημιουργίας του πλάσματος στο εργαστήριο και στο διάστημα καθώς και τις μεθόδους μελέτης του.

1.2 Τρόποι δημιουργίας του πλάσματος

Στο εργαστήριο το πλάσμα δημιουργείται από τις ηλεκτρικές εκκενώσεις. Όταν ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο εφαρμοσθεί σε μερικώς ιονισμένο αέριο, τα ηλεκτρόνια και ιόντα επιταχύνονται και αποκτούν μεγάλες ταχύτητες. Όταν φορτισμένα σωματίδια με μεγάλη ταχύτητα συγκρούονται με άτομα ή μόρια, ελευθερώνουν τροχιακά ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα που δημιουργούνται με τη σειρά τους, επιταχύνονται και ιονίζουν άλλα άτομα ή μόρια. Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε τέτοιες συσκευές, όπως για παράδειγμα, η λάμπα φθορισμού κ.α. Η πυκνότητα του πλάσματος και η πίεση διαφέρουν από συσκευή σε συσκευή, για παράδειγμα, σε λαμπτήρες εκκένωσης η πίεση είναι 1 torr, η αριθμητική πυκνότητα $10^9 - 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ και η θερμοκρασία ηλεκτρονίων 10^4 K .

Το πλάσμα μπορεί να δημιουργηθεί και με θερμικό ιονισμό όταν η θερμική ενέργεια του αερίου γίνει ίση με την ενέργεια ιονισμού του. Για τα ουδέτερα μόρια, η ενέργεια ιονισμού είναι της τάξης μερικών eV, και αντιστοιχεί σε θερμοκρασία $10^4 - 10^5 \text{ K}$.

Τα μέταλλα και οι ημιαγωγοί περιλαμβάνουν ελεύθερα ηλεκτρόνια, για παράδειγμα, στα μέταλλα συναντάμε αριθμητικές πυκνότητες της τάξεως 10^{23} cm^{-3} . Ένας ημιαγωγός περιέχει ελεύθερα ηλεκτρόνια και 'οπές'. Ένα πλάσμα από ηλεκτρόνια και 'οπές' ονομάζεται 'κβαντικό πλάσμα.' Η μελέτη ενός τέτοιου πλάσματος γίνεται με τη βοήθεια της κβαντομηχανικής, μιάς και η αλληλεπίδραση των γειτονικών ηλεκτρονίων γίνεται σημαντική.

Σε ύψος 70 – 500 km πάνω από την επιφάνεια της Γης, η πυκνότητα του ιονοσμένου αερίου αυξάνει δραματικά και σιγά-σιγά αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερη από την πυκνότητα του μη-ιονισμένου αερίου. Το στρώμα

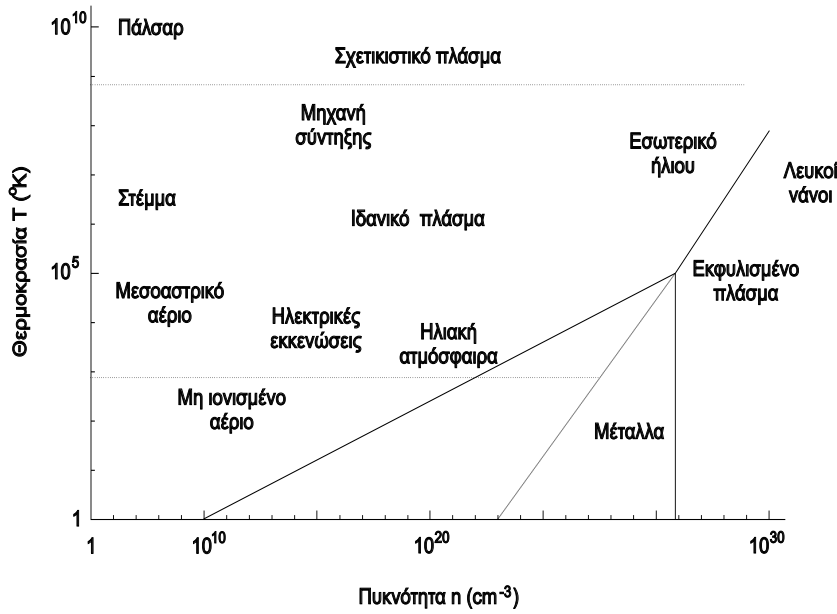
αυτό ονομάζεται 'ιονόσφαιρα'. Η αριθμητική πυκνότητα του πλάσματος στην ιονόσφαιρα είναι 10^6 cm^{-3} , ενώ η θερμοκρασία είναι 2000 K. Η θερμοκρασία και η πυκνότητα μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου, με την εναλλαγή των εποχών καθώς και με τη δραστηριότητα του Ήλιου. Ο τρόπος επίδρασης της ηλιακής δραστηριότητας στην ιονόσφαιρα της Γης δείχνει ότι ο Ήλιος δεν είναι μόνο πηγή ακτινοβολίας αλλά και πηγή πλάσματος. Πλάσμα ρέει από την επιφάνεια του Ήλιου στο μεσοπλανητικό χώρο και ονομάζεται 'ηλιακός άνεμος'. Η ταχύτητα του ηλιακού ανέμου κοντά στη Γη είναι 250-700 km/s, η αριθμητική πυκνότητα $1 - 10 \text{ cm}^{-3}$, ενώ η θερμοκρασία είναι 10^5 K . Ο ηλιακός άνεμος 'προσक्रούει' σε απόσταση 10-13 R_E , όπου $R_E = 6400 \text{ km}$ είναι η ακτίνα της Γης, στο μαγνητικό πεδίο της, το οποίο και συγκρατεί το πλάσμα γύρω από τη Γη και δημιουργεί τη λεγόμενη 'μαγνητόσφαιρα'.

Η ατμόσφαιρα του Ήλιου αποτελείται από διάφορα στρώματα, αρχίζοντας από τη χρωμόσφαιρα με αριθμητική πυκνότητα $10^{10} - 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ και θερμοκρασία 10^4 K . Πάνω από τη χρωμόσφαιρα βρίσκεται το στέμμα με πυκνότητα $10^9 - 10^8 \text{ cm}^{-3}$ και θερμοκρασία 10^6 K . Το εσωτερικό των αστέρων, καθώς και οι ατμόσφαιρες των αστέρων βρίσκονται σε κατάσταση πλάσματος. Στο εσωτερικό των αστέρων η πυκνότητα είναι 10^2 gr/cm^3 και η θερμοκρασία 10^7 K , ενώ στο εσωτερικό των αστέρων που βρίσκονται σε προχωρημένο στάδιο εξέλιξης, όπως οι λευκοί νάνοι, η πυκνότητα μπορεί να φτάσει τα $10^5 - 10^8 \text{ gr/cm}^3$, τιμές που αναλογούν σε αριθμητικές πυκνότητες των ηλεκτρονίων της τάξης των $10^{28} - 10^{31} \text{ cm}^{-3}$.

Τέλος, ο μεσοαστρικός χώρος αποτελείται από πολύ αραιό πλάσμα με αριθμητική πυκνότητα $10^{-2} - 1 \text{ cm}^{-3}$ και θερμοκρασία 10^4 K . Παράλληλα στο σύμπαν συναντάμε διάφορα αστροφυσικά αντικείμενα, όπως υπολείμματα υπερκαινοφανών, πάλσαρς, αστέρες που εκπέμπουν ακτίνες-X, ενεργά κέντρα γαλαξιών, συμπεριλαμβανομένων και ημιαστέρων, όπου το πλάσμα είναι κυρίαρχο συστατικό τους.

Πρόβλημα 1.1: Σε ποια περιοχή θερμοκρασιών (T_e, T_i) περιοριζόμαστε υποθέτοντας ότι το πλάσμα είναι μη-σχετικιστικό; (T_e είναι η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων και T_i η θερμοκρασία των ιόντων).

Λύση: Με πολλούς τρόπους μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη θερμοκρασία των ηλεκτρονίων και ιόντων, ώστε η μη-σχετικιστική ανάλυση του πλάσματος να είναι αποδεκτή, π.χ. όταν οι θερμικές τα-



Σχήμα 1.1. Παράμετροι συστημάτων που αποτελούνται από πλάσμα.

χύτητες V_e, V_i είναι μικρότερες της ταχύτητας του φωτός c . Η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι

$$V_e = 4.2 \times 10^7 [T_e(\text{eV})]^{1/2} \text{ cm/sec}$$

και για να είναι μικρότερη από τη ταχύτητα του φωτός $3 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$ θα πρέπει η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων να είναι $T_e < 6 \times 10^9 \text{ K} \simeq 500 \text{ keV}$. Την ίδια περίπου τιμή βρίσκουμε, αν κάνουμε χρήση της σχέσης

$$m_e c^2 \sim k_B T_e,$$

όπου k_B είναι η σταθερά του Boltzmann. Για τα ιόντα βρίσκουμε

$$V_i = 9.8 \times 10^5 [T_i(\text{eV})]^{1/2} \text{ cm/sec} < 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec},$$

άρα θα πρέπει η θερμοκρασία των ιόντων να είναι

$$T_i < 10^{13} \text{ K} \simeq 900 \text{ MeV}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, όταν $T_e < 500 \text{ keV}$ και $T_i < 1 \text{ GeV}$ μπορούμε να αγνοήσουμε τα σχετικιστικά φαινόμενα στην ανάλυση του πλάσματος.

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζονται οι παράμετροι διάφορων φυσικών συστημάτων τα οποία αποτελούνται από πλάσμα. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με *μη-σχετικιστικό πλάσμα* ($v \ll c$) που αποτελείται από ηλεκτρόνια και ιόντα. Συνηθίζουμε να αναφερόμαστε στη κατάσταση αυτή του πλάσματος ως ‘ιδανική.’

1.3 Θερμικός ιονισμός

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ένας από τους βασικούς μηχανισμούς δημιουργίας του πλάσματος είναι οι συγκρούσεις μεταξύ των ατόμων ή μορίων του αερίου. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται θερμικός ιονισμός. Αν η θερμική ενέργεια των ατόμων ή μορίων του αερίου υπερβεί το δυναμικό ιονισμού τους, ένα σημαντικό ποσοστό ατόμων ή μορίων ιονίζεται. Δηλαδή για το υδρογόνο (το δυναμικό ιονισμού του είναι 13.6eV , αυτό σημαίνει ότι για θερμοκρασία μεγαλύτερη από $\approx 10^4\text{K}$ τα άτομα του υδρογόνου θα είναι σχεδόν όλα ιονισμένα. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ποσοστό ατόμων που έχουν ιονισθεί όταν το αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και έχει θερμοκρασία T .

Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια μιας συγκεκριμένης στάθμης του ατόμου του υδρογόνου είναι E_n , σύμφωνα με τον νόμο του Boltzmann ο αριθμός των ατόμων που θα βρίσκεται στη κατάσταση αυτή θα είναι

$$N_n = A g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}},$$

όπου g_n είναι το στατιστικό βάρος της συγκεκριμένης κατάστασης, A σταθερά και T η θερμοκρασία του αερίου. Ο ολικός αριθμός των ατόμων του αερίου N υπολογίζεται εύκολα από τη παραπάνω σχέση,

$$N = \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n = A \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = AZ(T)$$

όπου $Z(T)$ είναι η συνάρτηση επιμερισμού (βλέπε περισσότερες λεπτομέρειες σε βιβλία Στατιστικής Φυσικής). Η ενέργεια E_n είναι θετική και θεωρούμε ότι η βασική κατάσταση $E_1 = 0$. Ο σχετικός αριθμός των ατόμων που θα καταλαμβάνουν τις στάθμες n και m , με βάση όσα ήδη αναφέραμε, θα είναι

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{E_n - E_m}{k_B T}}. \quad (1.1)$$

Αν το ηλεκτρόνιο απορροφήσει από μια τυχαία σύγκρουση ενέργεια E μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού E_∞ , θα μεταπηδήσει από την

κατάσταση n στην ελεύθερη κατάσταση (ιονισμός) και θα κινηθεί με ταχύτητα v , ενώ η κινητική του ενέργεια θα είναι $(1/2)mv^2 = E - E_\infty$. Το ποσοστό ιονισμού των ατόμων θα είναι

$$\frac{N(v)}{N_n} = \frac{g(v)}{g_n} e^{-\frac{\chi_n + \frac{1}{2}mv^2}{k_B T}} \quad (1.2)$$

όπου $\chi_n = E_\infty - E_n$ και $g(v)$ είναι το στατιστικό βάρος των καταστάσεων που μπορεί να καταλάβει το ελεύθερο ηλεκτρόνιο όταν κινείται με ταχύτητα v .

Ο υπολογισμός του στατιστικού βάρους $g(v)$ στηρίζεται στις αρχές της Κβαντομηχανικής. Αν υποθέσουμε ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη θέση (x, y, z) , και έχει ορμή (p_x, p_y, p_z) , τότε οι επιτρεπτές σταθμες που μπορεί να καταλάβει είναι

$$\frac{2dp_x dp_y dp_z}{h^3}.$$

Ο συντελεστής 2 οφείλεται στις δύο δυνατές καταστάσεις που μπορεί να πάρει το ηλεκτρόνιο με την ίδια ενέργεια λόγω του σπίν. Το στατιστικό βάρος υπολογίζεται από τη διαίρεση των πιθανών καταστάσεων με την πυκνότητα των ηλεκτρονίων

$$g(v) = \frac{2dp_x dp_y dp_z}{n_e h^3}.$$

Αντικαθιστώντας το στατιστικό βάρος $g(v)$ στην εξίσωση (1.2) έχουμε

$$\frac{n_e n_i}{N_n} = \frac{2}{g_n h^3} e^{-\frac{\chi_n}{k_B T}} e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp_x dp_y dp_z,$$

και ολοκληρώνοντας στο χώρο των ταχυτήτων καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{n_e n_i}{N_n} &= \frac{2}{h^3} \frac{e^{-\frac{\chi_n}{k_B T}}}{g_n} 4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp \\ &= \frac{2}{h^3} \frac{e^{-\frac{\chi_n}{k_B T}}}{g_n} (2\pi m_e k_B T)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Χρειάζεται να κάνουμε μιά ακόμα διόρθωση για το στατιστικό βάρος g_i της κατάστασης που θα καταλάβει το ιον που αφήνει πίσω το ηλεκτρόνιο όταν φεύγει,

$$\boxed{\frac{n_e n_i}{N_n} = \frac{2g_i}{g_n} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_n}{k_B T}}}. \quad (1.4)$$

Η εξίσωση (1.4) είναι γνωστή ως **‘εξίσωση του Saha’**, από το όνομα του ινδού φυσικού που μελέτησε πρώτος τις στατιστικές ιδιότητες του ιονισμένου αερίου στις άρχές του περασμένου αιώνα.

Είναι χρήσιμο να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την εξίσωση του Saha θεωρώντας ότι αρχικά το αέριο του υδρογόνου βρίσκεται στην βασική κατάσταση $E_1 = 0$ και να συγκρίνουμε τα ιονισμένα άτομα με το σύνολο των ουδέτερων ατόμων του αερίου N_0 . Στη περίπτωση αυτή τα g_i και g_n θα αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες συναρτήσεις επιμερισμού,

$$\frac{n_e n_i}{N_0} = \frac{2Z_i (2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{Z_n h^3} e^{-\frac{\chi_0}{k_B T}}. \quad (1.5)$$

Το ποσοστό των ιονισμένων ατόμων

$$x = \frac{n_i}{N_0 + n_i}$$

υπολογίζεται από την εξίσωση (1.5)

$$\frac{x}{1-x} = \frac{2Z_i}{Z_0} \left[\frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} \right] \frac{(k_B T)^{3/2}}{n_e} e^{-\frac{\chi_0}{k_B T}}. \quad (1.6)$$

Αν η θερμοκρασία $k_B T \gg \chi_0$ τότε $x \rightarrow 1$, άρα έχουμε πετύχει τον ολικό ιονισμό του αερίου.

Πρόβλημα 1.2: Χρησιμοποιήστε την εξίσωση του Saha για να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων που είναι ιονισμένο στην επιφάνεια της Γης ($T = 300K$ και πίεση μία ατμόσφαιρα). (Υποθέστε ότι η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή, το δυναμικό ιονισμού για του αζώτου είναι του 14.6 eV και η αριθμητική του πυκνότητα των ατόμων $n_0 = 3 \times 10^{25} m^{-3}$).

Λύση: Ο τύπος του Saha έχει τη μορφή

$$\frac{n_i}{N_0} \simeq 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_e} e^{-\chi_0/k_B T}, \quad (1.7)$$

όπου n_i η πυκνότητα των ιονισμένων ατόμων, N_0 η πυκνότητα των ουδέτερων ατόμων, χ_0 το δυναμικό ιονισμού των ατόμων, n_e η πυκνότητα των ηλεκτρονίων και υποθέτουμε $n_e = n_i$. Το δυναμικό ιονισμού είναι $\chi_0 = 14.6$ eV, , $T = 3 \times 10^2$ K, και $N_0 \approx n_0 = 3 \times 10^{25} m^{-3}$ (Η θερμοκρασία του αερίου είναι πολύ μικρότερη από το δυναμικό ιονισμού και θεωρούμε ότι πολύ λίγα άτομα είναι ιονισμένα). Ο λόγος

$$\frac{n_i}{n_0} \simeq 10^{-122}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ποσοστό ιονισμού των ατόμων του αζώτου στην επιφάνεια της Γης είναι σχεδόν μηδέν.

1.4 Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων *Maxwell*

Η Στατιστική Μηχανική έχει στόχο να περιγράψει τις ιδιότητες μεγάλου αριθμού σωματιδίων (ατόμων, μορίων, ηλεκτρονίων, ιόντων, κλπ). Σημαντική πληροφορία για την στατιστική περιγραφή του 'ιδανικού αερίου' (το αέριο μπορεί να αποτελείται από άτομα, μόρια, να είναι μερικώς ή ολικώς ιονισμένο) είναι η ενεργειακή κατάσταση ενός αντιπροσωπευτικού σωματιδίου μέσα στο αέριο.

Αν υποθέσουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}$ έχει ορμή $\mathbf{p}$ και ότι οι δυνάμεις (εσωτερικές και εξωτερικές) που ασκούνται στα σωματίδια είναι αμελητέες τότε η ολική του ενέργεια είναι ίση με την κινητική ενέργεια

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

Αν το αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία τότε με βάση το νόμο του Boltzmann που αναφέραμε ήδη, η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται μέσα στο στοιχειώδη όγκο $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ και ορμή μεταξύ $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ είναι

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} \sim e^{-\frac{p^2/2m}{k_B T}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} \quad (1.8)$$

όπου $d\mathbf{r} = dx dy dz$ και $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$. Αν πολλαπλασιάσουμε την πιθανότητα $\mathcal{P}$ με το συνολικό αριθμό των σωματιδίων και αντικαταστήσουμε την ορμή από την ταχύτητα βρίσκουμε μία νέα συνάρτηση που θα ονομάσουμε συνάρτηση κατανομής

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = \text{ο μέσος αριθμός σωματιδίων που βρίσκεται στο χώρο μεταξύ } \mathbf{r} \text{ και } \mathbf{r} + d\mathbf{r} \text{ και έχει ταχύτητα } \mathbf{v} \text{ και } \mathbf{v} + d\mathbf{v}.$$

Με βάση όσα έχουμε ήδη αναφέρει η συνάρτηση κατανομής ενός ιδανικού αερίου, όταν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, θα είναι

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = C e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$$

όπου C είναι η σταθερά κανονικοποίησης και υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$C \int d^3r \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v = C e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = N$$

ή

$$CV \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi v^2 dv e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = CV \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{3/2} = N.$$

Η σταθερά

$$C = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

όπου $n = N/V$ είναι ο ολικός αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου. Η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων (που ονομάζεται και **συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων Maxwell**) παίρνει τη μορφή

$$\boxed{f_m(v) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}} \quad (1.9)$$

όπου $v = |\mathbf{v}|$ είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Ο μέσος αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου με ταχύτητα μεταξύ v και $v + dv$ ορίζεται από τη σχέση

$$F_m(v)dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv. \quad (1.10)$$

Η συνάρτηση κατανομής $F_m(v)$ είναι επίσης γνωστή ως “κατανομή ταχυτήτων Maxwell” και εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} F_m(v)dv = n.$$

Μια σειρά από ειδικές συναρτήσεις κατανομών ταχυτήτων προκύπτουν από τη συνάρτηση (1.9) με απλή ολοκλήρωση. Για παράδειγμα η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων $f(v_x)$ ορίζεται ως:

$$\boxed{f(v_x)dv_x = \text{ο μέσος αριθμός σωματιδίων με } x \text{ συνιστώσα της ταχύτητας μεταξύ } v_x \text{ και } v_x + dv_x}$$

και προκύπτει από τη σχέση

$$\begin{aligned} f(v_x)dv_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f_m(v)dv_x \\ &= n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \right] \end{aligned}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y z^2}{2k_B T}} dv_z \right] e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

άρα

$$f(v_x) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} \quad (1.11)$$

όμοια προκύπτουν και οι συναρτήσεις κατανομής $f(v_y)$ και $f(v_z)$.

Είναι ενδιαφέρον να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα v_x

$$\langle v_x \rangle = \int v_x f(v_x) dv_x = 0$$

και τη μέση τετραγωνικής ταχύτητα

$$\langle v_x^2 \rangle = \int v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{k_B T}{m}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η κινητική ενέργεια

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{2},$$

άρα η ενέργεια ισοκατανέμεται στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας.

Όμοια υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{n} \int \int \int v f_m(v) d^3v \\ &= \frac{4\pi}{n} \int_0^{\infty} v^3 f_m(v) dv \\ &= \frac{4\pi}{n} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &= \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Η ενεργός ταχύτητα

$$\begin{aligned} v_{rms} &= \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle} \\ &= \sqrt{3 \langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

και η πιθανότερη ταχύτητα v_p υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{dF_m}{dv} = 0$$

$$ve^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} + v^2(-mv/k_B T)e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = 0$$

άρα

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

δείξαμε λοιπόν ότι όταν το ιδανικό αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, μπορούμε να υπολογίσουμε τρεις χαρακτηριστικές ταχύτητες, την μέση ταχύτητα, την ενεργό ταχύτητα και την πιθανότερη ταχύτητα ή θερμική ταχύτητα (V_j). Στη θερμοκρασία δωματίου ($T = 300K$) η ενεργός ταχύτητα της αμμωνίας είναι ίση με $500m/s$.

Πρόβλημα 1.3: Ιδανικό μονοατομικό αέριο πυκνότητας n περιέχεται σε παραλληλόγραμμο δοχείο όγκου V και βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περιβάλλον θερμοκρασίας T . Να υπολογισθεί ο αριθμός των σωματιδίων που συγκρούονται με τη μονάδα επιφάνειας των τοιχωμάτων στη μονάδα του χρόνου.

Λύση:

Προσεγγιστική λύση. Αν υποθέσουμε ότι η μια πλευρά του παραλληλογράμμου είναι παράλληλη με το επίπεδο Oxy και επειδή τα σωματίδια δεν έχουν καμία προτιμητέα διεύθυνση κίνησης τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n/3$ από τα σωματίδια που περιέχει το παραλληλόγραμμο κινούνται προς τη διεύθυνση Oz . Τα μισά από αυτά έχουν θετική ταχύτητα και θα χτυπήσουν την επιφάνεια A του δοχείου. Τα φορτία που θα φτάσουν στην επιφάνεια A σε χρόνο dt θα βρίσκονται μέσα στον όγκο $<v>dt$

$$\Phi_0 \sim \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) nA <v> dt = \frac{1}{6} nA <v> dt$$

όπου $<v>$ είναι η μέση ταχύτητα των σωματιδίων στο δοχείο.

Στη μονάδα του χρόνου και στη μονάδα επιφάνειας θα φτάσουν

$$\Phi_0 \sim \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) nA <v> dt = \frac{1}{6} n <v> .$$

Ακριβής λύση. Ένα τυχαίο σωματίδιο θα συγκρουστεί με το τοίχωμα αν το μέτρο της ταχύτητας του βρίσκεται μεταξύ v και $v + dv$ και η διεύθυνση της ταχύτητας σχηματίζει με τον άξονα Oz γωνία στη περιοχή $\theta + d\theta$ και ϕ και $\phi + d\phi$. Ο αριθμός των φορτίων που θα συγκρουστούν με την επιφάνεια A θα είναι

$$\Phi_0 = \int_{v_z > 0} f_m(v) v \cos \theta d^3 v.$$

Ο στοιχειώδης όγκος είναι

$$d^3 v = v^2 dv (\sin \theta d\theta d\phi)$$

και συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int_0^\infty v^3 f_m(v) dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \pi \int_0^\infty v^3 f_m(v) dv. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με την εξίσωση (1.12) έχουμε

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} n < v > .$$

Παρατηρούμε ότι το ακριβές αποτέλεσμα διαφέρει από το προσεγγιστικό μόνο κατά $2/3$.

1.4.1 Καταστατική εξίσωση ιδανικών αερίων

Με βάση όσα συζητήσαμε στο Πρόβλημα 1.3 μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη μέση πίεση του αερίου. Κάθε φορά που το μόριο προσεγγίζει την επιφάνεια A του δοχείου με μέση ορμή $m < v >$ και ανακλάται με την ίδια μέση ταχύτητα και θα παρατηρούμε μια αλλαγή της ορμής $\Delta p_z = -2m < v >$. Η μέση πίεση υπολογίζεται προσεγγιστικά από το τύπο

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{A} (2m < v >) \left(\frac{1}{6} n m < v > A \right) = \frac{1}{3} n m < v >^2 \\ &= \frac{2}{3} n \left(\frac{m < v >^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Το προσεγγιστικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το ακριβές, με τη διαφορά ότι στο ακριβές αποτέλεσμα στη θέση του τετραγώνου της μέσης ταχύτητας προκύπτει το τετράγωνο της ενεργούς ταχύτητας (Υπόδειξη: Ακολουθώντας τα βήματα του προβλήματος 1.3 υπολογίστε την καταστατική εξίσωση με βάση τη συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων Maxwell.),

$$\bar{p} = \frac{1}{3}nm < v^2 > \quad (1.15)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.15) και (1.13) θα έχουμε

$$\boxed{\bar{p} = nk_B T}. \quad (1.16)$$

1.5 Μέθοδοι μελέτης του πλάσματος

Το πλάσμα διαφέρει από τα ιδανικά αέρια σε ένα βασικό σημείο: στο ότι παρουσιάζει ‘συλλογικά φαινόμενα’. Τα συλλογικά φαινόμενα οφείλονται στη μεγάλη εμβέλεια των δυνάμεων Coulomb, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα τα φορτισμένα σωματίδια να μην αλληλεπιδρούν μόνο μέσω συγκρούσεων με τα γειτονικά τους φορτία αλλά και να δέχονται την επίδραση ενός μέσου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, που δημιουργούν όλα τα υπόλοιπα φορτία. Σε ένα μεγάλο αριθμό φαινομένων που θα περιγράψουμε σε αυτό το βιβλίο οι συγκρούσεις παίζουν μικρό ρόλο επειδή τα συλλογικά φαινόμενα εξελίσσονται πολύ πιο γρήγορα από το χαρακτηριστικό χρόνο των συγκρούσεων.

Οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν ανάλογες ιδιότητες με τις δυνάμεις Coulomb μεταξύ ηλεκτρονίων και ιόντων (είναι κεντρικές δυνάμεις και έχουν τη μορφή $1/r^2$). Για το λόγο αυτό, η στατιστική μελέτη των γαλαξιών και των αστρικών σμηνών βασίζεται σε μεθοδολογίες ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη του πλάσματος.

Στη μελέτη του πλάσματος χρησιμοποιούμε διάφορες προσεγγίσεις ανάλογα με τη φύση του προβλήματος που θέλουμε να αναλύσουμε κάθε φορά.

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε εξωτερικά εφαρμοζόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι η απλούστερη περιγραφή του πλάσματος και αποδίδεται από το νόμο του Νεύτωνα, ο οποίος στο σύστημα cgs, το οποίο χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό, εκφράζεται από την εξίσωση,

$$m_j \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_L = q_j \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{c} \right] \quad (1.17)$$

όπου F_L είναι η **δύναμη Lorentz**, m_j και q_j είναι η μάζα και το φορτίο του σωματιδίου και $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ είναι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Οι κινήσεις των φορτισμένων σωματιδίων σε συγκεκριμένες μαγνητικές τοπολογίες (π.χ. Μαγνητικό δίπολο της Γης, μαγνητικά πεδία στις μηχανές σύντηξης κ.α) μας δίνουν αρκετές πληροφορίες για τη μελέτη της παγίδευσης του πλάσματος αλλά και της επιτάχυνσης φορτίων μέσα σε ισχυρά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις κινήσεις των φορτίων μέσα σε διάφορες γεωμετρικές εξωτερικών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, αγνοώντας τα εσωτερικά συλλογικά πεδία.

Τα συλλογικά φαινόμενα στο πλάσμα περιγράφονται από τις **εξισώσεις Maxwell** και από την εξίσωση (1.17). Οι εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.21)$$

περιγράφουν την εξέλιξη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου με δεδομένα την πυκνότητα φορτίου (ρ) και ρεύματος ($\mathbf{J}$) στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ τη χρονική στιγμή t . Η πυκνότητα του ρεύματος και του φορτίου υπολογίζεται από τις εξισώσεις

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{j=1}^{N'} \mathbf{v} q_j(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} \quad (1.22)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{j=1}^{N'} q_j(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} \quad (1.23)$$

όπου το $\mathbf{v}$ είναι λύση της εξίσωσης (1.17), N' είναι ο ολικός αριθμός των φορτίων μέσα σε ένα επιλεγμένο μικρό όγκο ΔV γύρω από το σημείο $\mathbf{r}$. Για n σωματίδια οι εξισώσεις (1.17)-(1.23) αποτελούν ένα σύστημα $n + 4$ διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, που δίνει μία κλειστή περιγραφή του πλάσματος. Οι κινήσεις των φορτίων μεταβάλλουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, τα οποία με τη σειρά τους μεταβάλλουν τις τροχιές των φορτίων κ.ο.κ.

Είναι φανερό, ότι η στατιστική περιγραφή του πλάσματος είναι αναγκαία, εφόσον η λύση των $n+4$ εξισώσεων είναι πρακτικά αδύνατη. Στο

τρίτο κεφάλαιο θα συζητήσουμε τις εξισώσεις Vlasov-Maxwell που χρησιμοποιούνται στη στατιστική περιγραφή του πλάσματος. Όταν οι λεπτομέρειες που προκύπτουν από τη στατιστική περιγραφή του πλάσματος δεν επηρεάζουν το φαινόμενο που μελετάμε, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις Vlasov-Maxwell και να καταλήξουμε στις εξισώσεις του ρευστού πλάσματος.

Το πλάσμα συμπεριφέρεται και ως αγωγίμο υλικό και ως διηλεκτρικό, με αποτέλεσμα να διαθέτει χαρακτηριστική ‘σχέση διασποράς’ με βάση την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τις συχνότητες που μπορούν να διαδοθούν μέσα στο πλάσμα (βλέπε Griffiths Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, τόμος B, σελίδα 115), . Στο τέταρτο κεφάλαιο υπολογίζουμε τη σχέση διασποράς και τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης του πλάσματος.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάμε την ευστάθεια και αστάθεια του πλάσματος και στο έκτο κεφάλαιο τα μη γραμμικά φαινόμενα.

1.6 Χαρακτηριστικές παράμετροι του πλάσματος

1.6.1 Το μήκος Debye

Η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των φορτίων μέσα στο πλάσμα δεν είναι η ίδια με αυτή στο κενό (δηλαδή αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης ($1/r^2$)), γιατί τα υπόλοιπα φορτία στο πλάσμα ‘θωρακίζουν ηλεκτροστατικά’ το κάθε φορτίο. Αν και η θωράκιση αυτή έχει δυναμικό χαρακτήρα και μπορεί να μελετηθεί με πολλούς τρόπους, θα δώσουμε στη συνέχεια μία σχετικά απλή περιγραφή.

Ας υποθέσουμε ότι το πλάσμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και ότι εισάγουμε σωματίδιο με φορτίο $q_T > 0$ μέσα στο πλάσμα. Το φορτίο q_T απωθεί όλα τα ιόντα και έλκει τα ηλεκτρόνια. Η ολική ενέργεια κάθε φορτίου θα είναι

$$U_j = \frac{1}{2} m_j v^2 + q_j \varphi \quad (1.24)$$

όπου $\varphi(r)$ είναι το δυναμικό γύρω από το φορτίο q_T , που θέλουμε να υπολογίσουμε. Όταν επέλθει θερμοδυναμική ισορροπία γύρω από το φορτίο q_T , η πυκνότητα των ιόντων και ηλεκτρονίων θα ακολουθεί τη στατιστική Maxwell-Boltzmann των ιδανικών αερίων, άρα

$$n_j = n_{0j} \exp(-U_j/k_B T_j)$$

όπου U_j είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου. Για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα αντίστοιχα θα έχουμε

$$\begin{aligned} n_e &= n_{0e} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right) \exp\left[\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right] \\ &= n_{0e}(v) \exp\left[\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} n_i &= n_{0i} \exp\left(-\frac{m_i v^2}{2k_B T_i}\right) \exp\left[-\frac{e\varphi}{k_B T_i}\right] \\ &= n_{0i}(v) \exp\left[-\frac{e\varphi}{k_B T_i}\right], \end{aligned} \quad (1.26)$$

όπου $n_{0i}(v) = n_{0e}(v) = n_0$ είναι η μέση πυκνότητα του πλάσματος μακριά από το φορτίο q_T . Το ηλεκτροστατικό δυναμικό φ υπακούει στην εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho = 4\pi e(n_e - n_i) - 4\pi q_T \delta(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

όπου $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ είναι το γινόμενο τριών συναρτήσεων Dirac. Αντικαθιστούμε τα n_e, n_i από τις εξισώσεις (1.25)-(1.26) και υποθέτουμε ότι $e\varphi \ll k_B T_j$, διότι διαφορετικά τα ιόντα θα επανασυνδεθούν με τα ηλεκτρόνια για να δημιουργήσουν άτομα. Η εξίσωση (1.27) μακριά από το σημείο $\mathbf{r} = 0$ γράφεται

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi e^2 n_0}{k_B} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right) \varphi. \quad (1.28)$$

Ορίζουμε το μήκος Debye

$$\lambda_D^{-2} = \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2}$$

όπου το

$$\lambda_{Dj} = \sqrt{\frac{k_B T_j}{4\pi n_0 e^2}} = 7.43 \times 10^2 \sqrt{\frac{T_j (eV)}{n_0}} \text{ cm}, \quad (1.29)$$

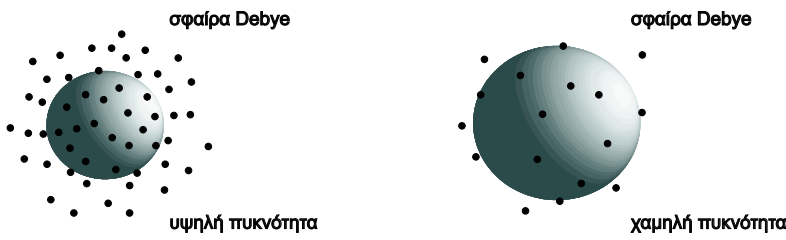
οπότε η εξίσωση (1.28) γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} \right) = \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi \quad (1.30)$$

και η λύση της, αν θεωρήσουμε ότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο παίρνει τη μορφή,

$$\boxed{\varphi(r) = \left(\frac{q_T}{r}\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)} \quad (1.31)$$

Από την εξίσωση (1.31) βλέπουμε ότι η αλληλεπίδραση των φορτίων στο πλάσμα εξασθενεί πολύ πιο γρήγορα με την απόσταση r από ότι η αλληλεπίδραση στο κενό ($\varphi \sim 1/r$). Όλα τα φορτία συμμετέχουν στη δημιουργία ενός μέσου ηλεκτρικού πεδίου που θωρακίζει το φορτίο q_T (βλέπε Σχήμα 1.2). Το φαινόμενο αυτό της “θωράκισης Debye” είναι το πρώτο συλλογικό φαινόμενο που συναντάμε.



Σχήμα 1.2. Σφαίρα Debye μέσα σε πλάσμα υψηλής και χαμηλής πυκνότητας

Εξετάσαμε το φαινόμενο της θωράκισης Debye σε στατική προσέγγιση, όμως τα αποτελέσματά μας μπορούν να γενικευτούν και για κινούμενα φορτία. Κάθε φορτίο συμμετέχει στη θωράκιση όλων των άλλων φορτίων και θωρακίζεται από όλα τα υπόλοιπα φορτία. Σε ένα πλάσμα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και $T_e = T_i$, η θερμική ταχύτητα των ιόντων είναι 43 φορές μικρότερη από τη θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων, με αποτέλεσμα η θωράκιση των ιόντων να είναι πολύ καλύτερη από τη θωράκιση των ηλεκτρονίων μιάς και τα ευκίνητα ηλεκτρόνια θωρακίζουν τα δυσκίνητα ιόντα ευκολότερα.

Στην Εισαγωγή δώσαμε έναν προσεγγιστικό και ποιοτικό ορισμό του πλάσματος. Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη πλάσματος. Εάν η δυναμική ενέργεια των φορτίων είναι πολύ μικρότερη από την κινητική ενέργεια τους, η επανασύνδεση των ατόμων είναι δύσκολη ή αδύνατη. Με άλλα λόγια, όταν ισχύει η σχέση

$$\varphi \ll k_B T_j, \quad (1.32)$$

το πλάσμα διατηρείται. Η δυναμική ενέργεια κάθε φορτίου λόγω της παρουσίας του γειτονικού του υπολογίζεται προσεγγιστικά από την εξίσωση $e\varphi = e(e/r)$ (όπου r είναι η μέση απόσταση από το πλησιέστερο γειτονικό φορτίο). Η μέση απόσταση γειτονικών φορτίων μέσα σε πλάσμα

πυκνότητας n_0 είναι της τάξης του $n_0^{-1/3}$. Αν κάνουμε χρήση όλων των παραπάνω συλλογισμών η εξίσωση (1.32) παίρνει τη μορφή

$$A_0 = n_0 \lambda_D^3 \gg 1 \quad (1.33)$$

όπου A_0 είναι η παράμετρος πλάσματος και είναι ίση με τον ολικό αριθμό των φορτίων μέσα στη σφαίρα Debye. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το πλάσμα μπορεί να υπάρξει στη φύση μόνον όταν το $A_0 \gg 1$.

Στο Ηλιακό στέμμα η πυκνότητα του πλάσματος είναι 10^8 cm^{-3} και η θερμοκρασία $T_e \approx 100 \text{ eV}$ άρα $\lambda_D \approx 1 \text{ cm}$ και η παράμετρος πλάσματος $A_0 \approx 10^8$.

Πρόβλημα 1.4: Θεωρούμε δύο άπειρες, παράλληλες πλάκες τοποθετημένες σε αποστάσεις $x = \pm d$ από την αρχή των αξόνων. Οι πλάκες είναι συνδεδεμένες με τη Γη (δυναμικό μηδέν) και ο χώρος μεταξύ τους είναι ομοιόμορφα γεμάτος με αέριο πυκνότητας n_0 και φορτίου q . (α) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση Poisson για να δείξετε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι $\varphi(x) = 2\pi n_0 q(d^2 - x^2)$. (β) Δείξτε ότι για $d \gg \lambda_D$ η ενέργεια που χρειάζεται για να μεταφερθεί ένα φορτίο από την πλάκα στο κέντρο ($x = 0$) είναι μεγαλύτερη από τη μέση κινητική ενέργεια των φορτίων.

Λύση (α) Ξεκινώντας από την εξίσωση Poisson έχουμε

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi\rho,$$

όπου $\rho = n_0 q$, άρα

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi n_0 q. \quad (1.34)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. (1.34), βρίσκουμε ότι

$$\varphi(x) = -2\pi n_0 q x^2 + Ax + B, \quad (1.35)$$

όπου A και B είναι οι σταθερές της ολοκλήρωσης και προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ($\varphi = 0$ στα σημεία $x = \pm d$). Η εξ. (1.35) παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x) = 2\pi n_0 q(d^2 - x^2). \quad (1.36)$$

(β) Η ενέργεια ενός φορτίου μέσα στον πυκνωτή είναι ίση με

$$\mathbb{W}(x) = q\varphi = 2\pi n_0 q^2 (d^2 - x^2),$$

ενώ η ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθεί ένα φορτίο από την πλάκα στο κέντρο ($x = 0$) θα είναι

$$\mathbb{W} = q(\varphi(0) - \varphi(d)) = 2\pi n_0 q^2 d^2.$$

Εάν $d \gg \lambda_D$ ή $d^2 \gg \frac{k_B T}{4\pi n_0 q^2}$, τότε και

$$\mathbb{W} = 2\pi n_0 q^2 d^2 \gg 2\pi n_0 q^2 \frac{k_B T}{4\pi n_0 q^2} = \frac{1}{2} k_B T.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι φορτία με μέση ταχύτητα ίση με τη θερμική ταχύτητα δε μπορούν να φτάσουν στο μέσο του πυκνωτή αν $\lambda_D \ll d$.

Πρόβλημα 1.5: Θεωρείστε ένα διαστημόπλοιο που διασχίζει ένα ηλεκτρικά ουδέτερο πλάσμα, όπου οι θερμικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων και των ιόντων είναι V_e και V_i αντίστοιχα, με $V_e \gg V_i$ και η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων είναι T_e . Δείξτε ότι το διαστημόπλοιο θα δημιουργήσει γύρω του ένα αρνητικό δυναμικό φ και ότι η μέγιστη δυνατή τιμή του φ είναι $(k_B T_e / e) \ln(V_e / V_i)$.

Λύση: Αν το διαστημόπλοιο κινείται μέσα στο πλάσμα, σχηματίζονται ροές ηλεκτρονίων και ιόντων που ισοδυναμούν με ρεύματα πυκνότητας

$$\mathbf{J}_j = \pm n_{0j} \mathbf{V}_j e, \quad \text{όπου } j = i, e \quad (1.37)$$

για τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια αντίστοιχα. Δεδομένου ότι αρχικά το πλάσμα είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, ισχύει $n_{0e} = n_{0i}$, και επειδή $V_e \gg V_i$, ισχύει λόγω των (1.37)

$$|J_e| \gg J_i.$$

Συνεπώς η ροή των ηλεκτρονίων υπερνικά τη ροή των ιόντων και το σκάφος θα φορτιστεί, δημιουργώντας γύρω του ένα αρνητικό δυναμικό φ . Ο ρόλος του δυναμικού είναι η αναχαίτηση της ροής των ηλεκτρονίων, άρα καθώς το δυναμικό αυξάνεται, το ρεύμα των ηλεκτρονίων μειώνεται. Κάποια στιγμή θα ισχύσει $|J_e| = J_i$, και τα γρήγορα ηλεκτρόνια θα αποκαταστήσουν θερμοδυναμική ισορροπία γύρω από το διαστημόπλοιο. Λόγω των (1.37) και της εξίσωσης Boltzmann θα ισχύει η σχέση

$$n_{0e} \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) V_e = n_{0i} V_i,$$

από όπου προκύπτει η ζητούμενη σχέση

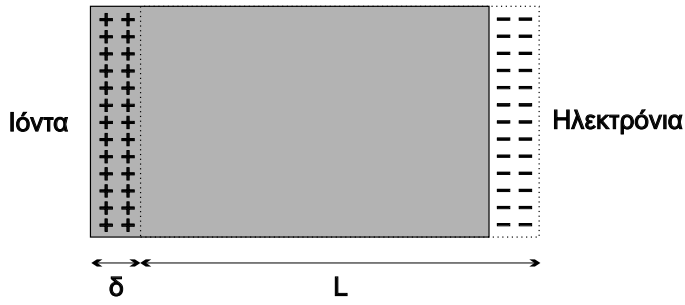
$$\varphi = \frac{k_B T_e}{e} \ln\left(\frac{V_i}{V_e}\right).$$

1.6.2 Συχνότητα πλάσματος

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι τα φορτία στο πλάσμα εκτελούν περιοδική ταλάντωση με χαρακτηριστική συχνότητα

$$\omega_j = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_j} \right)^{1/2} \quad (1.38)$$

την οποία ονομάζουμε συχνότητα πλάσματος ή συχνότητα Langmuir. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό μοντέλο για τον υπολογισμό της συχνότητας πλάσματος.



Σχήμα 1.3. Απομάκρυνση των ηλεκτρονίων από τα ακίνητα ιόντα.

Εστω ότι μόνο τα ηλεκτρόνια κινούνται, ενώ τα ιόντα έχουν άπειρη μάζα και παραμένουν ακίνητα. Εάν σε ένα άπειρο και ομογενές πλάσμα ένα στρώμα ηλεκτρονίων πάχους L μετατοπισθεί κατά μια απόσταση $\delta \ll L$ (Σχήμα 1.3), θα δημιουργηθεί μέσα στο πλάσμα ένα ηλεκτρικό πεδίο επαναφοράς $E(x)$, το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα από την εξίσωση Poisson στη μια διάσταση

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho.$$

Η πυκνότητα των φορτίων είναι $\rho = n_0 e$ και άρα το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει την τιμή

$$|E| = 4\pi n_0 e \delta.$$

Η εξίσωση κίνησης των ηλεκτρονίων είναι

$$m_e \ddot{\delta} = -e|E| = -4\pi e^2 n_0 \delta$$

και περιγράφει την ταλάντωση του μετατοπισμένου στρώματος ηλεκτρονίων. Η συχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων ονομάζεται συχνότητα πλάσματος $\omega_e = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}$. Αν δεν θεωρήσουμε τα ιόντα ακίνητα, μπορούμε να δείξουμε ότι η συχνότητα πλάσματος θα ορίζεται από τη σχέση

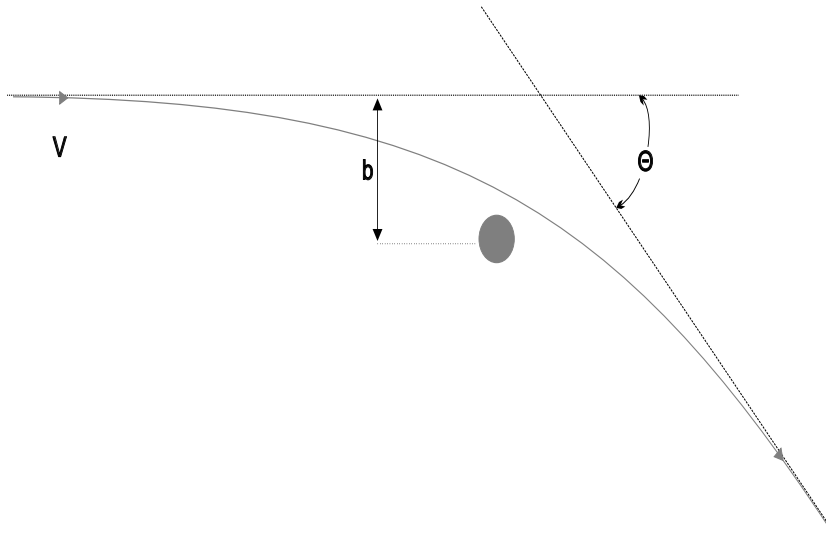
$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} + \frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}. \quad (1.39)$$

Η συχνότητα πλάσματος των ηλεκτρονίων είναι

$$\nu_e \approx 10^4 \sqrt{n_0} \text{ Hz}.$$

Στο Ηλιακό στέμμα η χαρακτηριστική συχνότητα πλάσματος των ηλεκτρονίων θα είναι $\approx 100 \text{ MHz} - 1 \text{ GHz}$.

1.6.3 Συχνότητα συγκρούσεων



Σχήμα 1.4. Η τροχιά ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο ενός ακίνητου ιόντος φορτίου e .

Η συχνότητα συγκρούσεων των ηλεκτρονίων με τα ιόντα προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\nu_{ei} = n_0 \sigma_{sc} v,$$

όπου το σ_{sc} είναι η ενεργός διατομή που ορίζεται στη συνέχεια. Τα ηλεκτρόνια, τα οποία θεωρούμε ότι κινούνται με μέση ταχύτητα v , που θα προλάβουν να συγκρουστούν στη μονάδα του χρόνου με το ακίνητο ιόν, θα είναι αυτά που περιέχονται μέσα σε κύλινδρο με όγκο $(\pi b^2)v$ (η σχέση αυτή προκύπτει από την προσέγγιση ότι τα φορτία κινούνται μέσα σε ένα περιβάλλον από σφαίρες με ακτίνα b). Άρα ο αριθμός των συγκρούσεων ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή το ν_{ei} , θα ισούται με $n_0(\pi b^2)v$. Από αυτόν το συλλογισμό προκύπτει η σχέση

$$\sigma_{sc} \equiv \pi b^2. \quad (1.40)$$

Θα επιδιώξουμε στη συνέχεια να βρούμε μία προσεγγιστική έκφραση για την ενεργό διατομή.

Ας υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο με σταθερή ταχύτητα v πλησιάζει ένα ακίνητο ιόν με φορτίο e (Σχήμα 1.4). Εάν δεν λάβουμε υπόψη τη δύναμη Coulomb, το ηλεκτρόνιο θα ακολουθήσει μία ευθύγραμμη κίνηση που θα απέχει, στο πλησιέστερο σημείο, απόσταση b από το ιόν. Την απόσταση αυτή θα την ονομάσουμε παράμετρο κρούσης. Η δύναμη Coulomb θα αναγκάσει το ηλεκτρόνιο να εκτραπεί κατά γωνία θ που σχετίζεται με την απόσταση b . Η δύναμη Coulomb που δέχεται το ηλεκτρόνιο είναι

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.41)$$

όπου $\mathbf{e}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης του διανύσματος θέσης του ηλεκτρονίου ως προς το ιόν. Η δύναμη $\mathbf{F}$ επιδρά ισχυρά στο ηλεκτρόνιο, κυρίως όταν αυτό βρίσκεται στη γειτονιά του ιόντος, και η αλληλεπίδραση αυτή διαρκεί περίπου $t \simeq b/v$. Η αλλαγή της ορμής του ηλεκτρονίου είναι σύμφωνα με το θεώρημα ώθησης-ορμής, ίση με $\Delta(m_e v) = |Ft| = e^2/(bv)$. Για συγκρούσεις με γωνία απόκλισης $\theta > 90^\circ$, η μεταβολή της ορμής είναι της τάξεως $m_e v$, δηλαδή, $\Delta(m_e v) = m_e v = e^2/(bv)$, άρα $b = e^2/(m_e v^2)$ και η ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{sc} \equiv \pi b^2 = \frac{\pi e^4}{m_e^2 v^4} \quad (1.42)$$

και άρα

$$\boxed{\nu_{ei} \approx \frac{n_0 \pi e^4}{m_e^2 v^3}}. \quad (1.43)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι τα ηλεκτρόνια που συγκρούονται με το ιόν βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία και κινούνται με μέση ταχύτητα ίση

με τη θερμική $V_e = (k_B T_e / m_e)^{1/2}$, τότε η συχνότητα συγκρούσεων είναι ίση με

$$\nu_{ei}^* \approx \frac{n_0 \pi e^4}{\sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2}}. \quad (1.44)$$

Εάν λάβουμε υπόψη και τις συγκρούσεις που έχουν γωνία απόκλισης μικρότερη από 90° , τότε η συχνότητα ν_{ei}^* θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το λογάριθμο του $(b_{\max}/b_{\min})$. Το $b_{\min} = b$ αντικαθίσταται από τις σχέσεις που προσεγγιστικά υπολογίσαμε πιο πάνω, αφού λάβουμε επίσης υπόψη μας ότι η μέση ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου, όταν το πλάσμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, είναι ίση με τη θερμική. Η μέγιστη τιμή του b είναι ίση με το μήκος Debye, εφόσον η δύναμη Coulomb μηδενίζεται, όταν η παράμετρος κρούσης είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα Debye. Για τις περισσότερες εφαρμογές (εργαστηριακό και αστροφυσικό πλάσμα) ο λογάριθμος του λ_D/b είναι μεταξύ 10-20 και επομένως μία προσεγγιστική σχέση για τη συχνότητα των συγκρούσεων είναι

$$\nu_{ei}^* = [2.9 \times 10^{-5}] n_0 T_e^{-3/2} \text{sec}^{-1} \quad (1.45)$$

(βλέπε Πίνακα 1.1 για $\ln A = 10$) όπου η πυκνότητα του πλάσματος μετράται σε cm^{-3} και η θερμοκρασία σε eV. Κάνοντας χρήση των εξισώσεων (1.38) και (1.44) μπορούμε να δείξουμε ότι $(\omega_e / \nu_{ei}) = A_0 \gg 1$ (βλέπε εξίσωση (1.33)), πράγμα που σημαίνει ότι η συχνότητα συγκρούσεων στο πλάσμα είναι πολύ μικρότερη από τη συχνότητα του πλάσματος. Σε πολλές εφαρμογές του πλάσματος στη φύση και στο εργαστήριο τα φαινόμενα εξελίσσονται με χαρακτηριστικούς χρόνους $t \sim \omega_e^{-1}$. Για το λόγο αυτό στην ανάλυση αυτών των εφαρμογών αγνοούμε τις συγκρούσεις.

Πρόβλημα 1.6: Η συχνότητα συγκρούσεων που υπολογίσαμε (εξίσωση (1.43)) ισχύει για συγκρούσεις που έχουν σαν αποτέλεσμα μεγάλη εκτροπή (μεγάλη γωνία θ). Διορθώστε τη συχνότητα συγκρούσεων, ώστε να λαμβάνονται υπόψη και συγκρούσεις με μικρή γωνία σκέδασης θ .

Λύση: Η παράμετρος κρούσης b συνδέεται με τη γωνία ϑ με τη σχέση (βλέπε Θεωρητική Μηχανική, Ι. Χατζηδημητρίου, τεύχος Α, σ.115)

$$\cot(\vartheta/2) = \frac{mbv^2}{e^2},$$

όπου

$$b = \frac{e^2}{mv^2} \frac{1}{\tan(\vartheta/2)} \quad (1.46)$$

και

$$db = -\frac{e^2}{2mv^2} \frac{d\vartheta}{\sin^2(\vartheta/2)}. \quad (1.47)$$

Η διαφορική διατομή της κρούσης είναι ίση με

$$d\sigma = |2\pi b db|. \quad (1.48)$$

Από τις σχέσεις (1.46), (1.47) και (1.48) έχουμε

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{2\pi d\vartheta}{2} \sin^{-2}(\vartheta/2) \tan^{-1}(\vartheta/2),$$

όμως επειδή $\sin \vartheta = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$ και $\tan(\vartheta/2) = \sin(\vartheta/2)/\cos(\vartheta/2)$,

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)} d\vartheta. \quad (1.49)$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός και ως **‘τύπος του Rutherford.’** Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή για τη μεταβολή της ορμής ($d\sigma'$), αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (1.49), αφού την πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση βάρους $(\cos \vartheta - 1)$ που αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της ορμής κατά την κρούση (γιατί $\Delta p = p_2 - p_1 = p_1(\cos \vartheta - 1)$, για ϑ μικρό). Άρα $d\sigma' = (\cos \vartheta - 1)d\sigma$, όμως $\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2(\vartheta/2)$, άρα

$$d\sigma' = - \left(\frac{e^4}{4m^2v^4} \right) 4\pi \frac{\sin \vartheta}{\sin^2(\vartheta/2)} d\vartheta.$$

Για μικρές γωνίες ϑ , $\sin \vartheta \simeq \vartheta$ και $\sin^2(\vartheta/2) \simeq \vartheta^2/4$, και τότε

$$d\sigma' = - \left(\frac{4\pi e^4}{m^2v^4} \right) \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\sigma' = - \left(\frac{4\pi e^4}{m^2v^4} \right) \int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = - \left(\frac{4\pi e^4}{m^2v^4} \right) \ln[\vartheta]_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}$$

ή

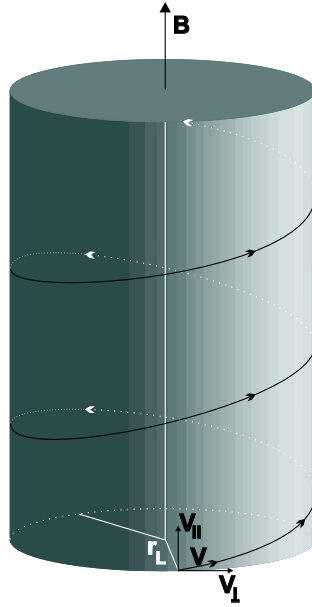
$$\ln \left(\frac{v_{\min}}{v_{\max}} \right) \sim \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_{\min}} \right),$$

γιατί η ελάχιστη γωνία κρούσης $\vartheta_{\min}$ αντιστοιχεί στη μέγιστη παράμετρο κρούσης $b = \lambda_D$ και η συχνότητα συγκρούσεων είναι

$$\nu_{ei} = n_0 \sigma' v = \frac{4\pi e^4 n_0}{m^2 v^3} \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_{\min}} \right).$$

Η ελάχιστη απόσταση που αντιστοιχεί στη μέγιστη γωνία ϑ υπολογίζεται προσεγγιστικά από τον τύπο $1/2mv^2 \simeq e^2/b_{\min}$ (για μετωπική σύγκρουση, κινητική ενέργεια $\simeq$ δυναμική), άρα $b_{\min} \simeq 2e^2/mv^2 \approx 2e^2/mV_e^2$. (Η ακριβής τιμή δεν έχει σημασία, γιατί η σχέση είναι λογαριθμική.)

1.6.4 Κυκλοτρονική συχνότητα



Σχήμα 1.5. Κίνηση φορτίου μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε χρονικά σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο περιγράφεται από την εξίσωση (1.17)

$$m_j \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q_j(\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}/c). \quad (1.50)$$

Εάν το μαγνητικό πεδίο είναι $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ και η ταχύτητα $\mathbf{v}_j$ αναλυθεί σε μία συνιστώσα κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο και μία παράλληλη, δηλαδή $\mathbf{v} = v_\perp \mathbf{e}_\perp + v_\parallel \mathbf{e}_\parallel$, τότε η εξίσωση (1.50) γράφεται

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = 0 \quad (1.51)$$

και

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \left(\frac{q_j B_0}{m_j c} \right) \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{e}_z. \quad (1.52)$$

Αν εκφράσουμε την ταχύτητα στο επίπεδο (xy) σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχουμε $\mathbf{v}_\perp = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y$ και η εξίσωση (1.52) θα μετατραπεί σε δύο εξισώσεις

$$\frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{q_j B}{m_j c} \right) v_y \quad (1.53)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{q_j B}{m_j c} \right) v_x \quad (1.54)$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (1.53)-(1.54) ως προς το χρόνο καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = - \left(\frac{q_j B}{m c} \right)^2 v_x \quad (1.55)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \left(\frac{q_j B}{m c} \right)^2 v_y. \quad (1.56)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (1.55)-(1.56) έχουν τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή και οι λύσεις τους είναι

$$v_x(t) = v_\perp(t=0) \sin(\Omega_j t) \quad (1.57)$$

$$v_y(t) = -\varepsilon v_\perp(t=0) \cos(\Omega_j t). \quad (1.58)$$

όπου $\varepsilon = 1$ για τα ιόντα και -1 για τα ηλεκτρόνια και

$$\boxed{\Omega_j \equiv \frac{|q_j| B_0}{m_j c}} \quad (1.59)$$

είναι η κυκλοτρονική συχνότητα. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (1.51), (1.57) και (1.58) και διαλέγοντας κατάλληλα το σύστημα αναφοράς, καταλήγουμε στην εξίσωση της τροχιάς του φορτίου

$$z(t) = v_z(t=0)t \quad (1.60)$$

$$x(t) = \left(\frac{v_x(t=0)}{\Omega_j} \right) \sin(\Omega_j t) = r_{Lj} \sin(\Omega_j t) \quad (1.61)$$

$$y(t) = \varepsilon \left(\frac{v_x(t=0)}{\Omega_j} \right) \cos(\Omega_j t) = \varepsilon r_{Lj} \cos(\Omega_j t) \quad (1.62)$$

όπου η ακτίνα και ακτίνα $r_{Lj} = (v_{\perp}/\Omega_j)$ είναι γνωστή ως ακτίνα Larmor. Η κίνηση των ιόντων είναι δεξιόστροφη ενώ των ηλεκτρονίων αριστερόστροφη. Άρα το φορτίο εκτελεί (δεξιόστροφη για τα ιόντα και αριστερόστροφη για τα ηλεκτρόνια) ελικοειδή τροχιά (Σχήμα 1.5). Στο Ηλιακό στέμμα το μαγνητικό πεδίο πάνω από τα κέντρα δράσης είναι $\approx 100G$ και η χαρακτηριστική κυκλοτρονική συχνότητα των ηλεκτρονίων είναι $\approx 300MHz$ συγκρίσιμη με την συχνότητα πλάσματος.

1.7 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε στους τρόπους δημιουργίας του πλάσματος, στους τρόπους μελέτης του και στις χαρακτηριστικές παραμέτρους που παίζουν αποφασιστικό ρόλο στη μελέτη του. Στον Πίνακα 1.1 παραθέτουμε τις βασικές παραμέτρους του πλάσματος.

Ανακεφαλαιώνοντας υπενθυμίζουμε ότι ορίσαμε:

- το **μήκος Debye** (λ_{Dj}), μία ποσότητα που σχετίζεται με τα συλλογικά φαινόμενα και ορίζει την ακτίνα της σφαίρας γύρω από τα ηλεκτρόνια και ιόντα όπου το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι διάφορο του μηδενός.
- την **παράμετρο πλάσματος** (Λ_0) και δείξαμε ότι το πλάσμα μπορεί να υπάρξει μόνο όταν $\Lambda_0 \gg 1$.
- τη **συχνότητα πλάσματος** (ω_j), που χαρακτηρίζει τις ηλεκτροστατικές ταλαντώσεις των ηλεκτρονίων και ιόντων μέσα στο πλάσμα.
- τη **συχνότητα συγκρούσεων** (ν_{ei}). Η σύγκριση της συχνότητας πλάσματος με τη συχνότητα συγκρούσεων καθορίζει το ρόλο που θα παίζουν οι συγκρούσεις στο πλάσμα.

- την κυκλοτρονική συχνότητα (Ω_j) και την ακτίνα Larmor (r_{Lj}), που αποτελούν βασικές παραμέτρους στο μαγνητισμένο πλάσμα.

Πίνακας 1.1. Παράμετροι Πλάσματος

κυκλοτρονική συχνότητα ηλεκτρονίου	Ω_e	$1.8 \times 10^7 B \text{ rad/sec}$
κυκλοτρονική συχνότητα πρωτονίου	Ω_i	$9.58 \times 10^3 B \text{ rad/sec}$
συχνότητα πλάσματος ηλεκτρονίων	ω_e	$5.64 \times 10^4 n_e^{1/2} \text{ rad/sec}$
συχνότητα πλάσματος πρωτονίων	ω_i	$1.32 \times 10^3 n_i^{1/2} \text{ rad/sec}$
συχνότητα συγκρούσεων ηλεκτρονίων-πρωτονίων	ν_{ei}	$2.91 \times 10^{-6} n_e (\ln A_0) T_e^{-3/2} \text{ sec}^{-1}$
συχνότητα συγκρούσεων πρωτονίων-πρωτονίων	ν_{ii}	$4.8 \times 10^{-8} n_i (\ln A_0) T_i^{-3/2} \text{ sec}^{-1}$
ακτίνα Larmor ηλεκτρονίου	r_{Le}	$2.38 T_e^{1/2} B^{-1} \text{ cm}$
ακτίνα Larmor πρωτονίου	r_{Li}	$1.02 \times 10^2 T_i^{1/2} B^{-1} \text{ cm}$
μήκος Debye	λ_{Dj}	$7.43 \times 10^2 T_j^{1/2} n_j^{-1/2} \text{ cm}$
θερμική ταχύτητα ηλεκτρονίων	V_e	$4.19 \times 10^7 T_e^{1/2} \text{ cm/sec}$
θερμική ταχύτητα πρωτονίων	V_i	$9.8 \times 10^5 T_i^{1/2} \text{ cm/sec}$

(Όλες οι ποσότητες εκφράζονται στο σύστημα c.g.s. εκτός από τις θερμοκρασίες που εκφράζονται σε eV, και A_0 από (1.14))

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο είναι εύκολο τώρα να δώσουμε έναν πληρέστερο ορισμό του πλάσματος:

Πλάσμα είναι ένα μερικώς ή ολικώς ιονισμένο αέριο στο οποίο κυριαρχούν τα συλλογικά φαινόμενα και στο οποίο ισχύει $\Lambda_0 \gg 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1.1. Υπολογίστε τη θερμική ταχύτητα, το μήκος Debye, την παράμετρο πλάσματος και τη συχνότητα πλάσματος (υποθέστε ότι $T_e = T_i$) για τα συστήματα που αναφέρονται στο Σχήμα 1.1.
- 1.2. Η θερμοκρασία του πλάσματος στο μεσοαστρικό χώρο δεν είναι ακριβώς γνωστή. Μπορεί να είναι και πολύ χαμηλότερη από 1eV, ενώ η πυκνότητα είναι $n_0 = 10^{-5} \text{cm}^{-3}$. Πώς είναι δυνατό το πλάσμα να διατηρείται σε τόσο χαμηλή θερμοκρασία;
- 1.3. Σε ένα μακρινό Γαλαξία υπάρχει ένα αέριο από πρωτόνια και αντιπρωτόνια με πυκνότητα $n = 10^6 \text{m}^{-3}$ και θερμοκρασία 100 K. Υπολογίστε το μήκος Debye.
- 1.4. Πλάσμα θερμοκρασίας 100 eV βρίσκεται μέσα σε ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο με ένταση 1000 Gauss και η πυκνότητά του μεταβάλλεται. Υπολογίστε για ποιές τιμές της πυκνότητας τα φορτία θα συγκρούονται τόσο συχνά μεταξύ τους ώστε να μην 'βλέπουν' το μαγνητικό πεδίο, άρα θα αγνοήσουμε τη παρουσία του στη μελέτη του πλάσματος.
- 1.5. (1) Να υπολογισθεί η ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα άπειρο ομογενές αέριο ηλεκτρονίων.
(2) Να υπολογιστεί η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου σε άπειρο πλάσμα. Ποιά είναι η σημασία αυτού του αποτελέσματος για τα συλλογικά φαινόμενα στο πλάσμα;
- 1.6. Δείξτε ότι το φορτίο που δημιουργείτε από τα ηλεκτρόνια και ιοντα μέσα στη σφαίρα Debye είναι ίσο και αντίθετο από το φορτίο q_T .
- 1.7. Να εκφρασθεί το μήκος Debye ως συνάρτηση ενός χαρακτηριστικού χρόνου και μιάς χαρακτηριστικής ταχύτητας στο πλάσμα.
- 1.8. Ένα ηλεκτρόνιο πλησιάζει με ταχύτητα v_0 ένα ακίνητο φορτίο κατά μία τυχαία διεύθυνση $\hat{e}$. Να βρεθεί η συνιστώσα της ταχύτητας, κάθετα στην αρχική διεύθυνση, μετά τη σύγκρουση. Θεωρήστε ότι η αλληλεπίδραση είναι ασθενής, όποτε η σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η παράμετρος κρούσεως και η συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση $\hat{e}$ παραμένουν σταθερές.