2. ΣΤΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΗ ΠΕΔΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Η μελέτη της κίνησης φορτίων μέσα σε εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι ένα κεφάλαιο που θα μπορούσε να αποτελέσει μέρος των μαθημάτων της Μηχανικής ή/και του Ηλεκτρομαγνητισμού. Η κίνηση φορτίων σε εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μπορεί να μελετηθεί με την ανάλυση της εξίσωσης (1.17), μόνο όταν τα εξωτερικά πεδία είναι πολύ πιο ισχυρά από τα συλλογικά πεδία, ή ισοδύναμα, αν η ενέργεια που μεταφέρουν τα πεδία στα φορτία είναι αμελητέα σε σχέση με την ολική ενέργεια των πεδίων.

Μία σειρά από εφαρμογές επιβάλλουν τη λεπτομερειακή μελέτη της κίνησης φορτίων μέσα σε εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Μερικές από αυτές τις εφαρμογές είναι: (1) Κίνηση φορτίων μέσα σε μηχανές σύντηξης (π.χ. σε μαγνητικούς καθρέφτες, Tokamak κ.λ.π). (2) Κίνηση φορτίων στο μαγνητικό δίπολο της Γης, των πλανητών, των πάλσαρς κ.λ.π. (3) Κίνηση φορτίων μέσα σε ισχυρά ηλεκτρομαγνητικά πεδία (lasers, μικροκύματα κ.ά.). (4) Κίνηση φορτίων μέσα σε κύματα κρούσης και τυρβώδεις ροές. (5) Κίνηση φορτίων μέσα σε επιταχυντές. (6) Κατασκευή και μελέτη των ηλεκτρονικών μικροσκοπίων.

Η κίνηση φορτίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία μπορεί να μελετηθεί με βάση την εξίσωση (1.17) (Νευτώνια Μηχανική) ή με βάση την αναλυτική δυναμική. Η αναλυτική δυναμική στηρίζεται στις συναρτήσεις Langrange και Hamilton. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις αυτές για τη κίνηση φορτίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

2.1.1 Συνάρτηση *Langrange*

Η δύναμη Lorentz διαφέρει από τις δυνάμεις Coulomb και της βαρύτητας στο ότι είναι συνάρτηση και της ταχύτητας. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι και η δύναμη Lorentz

$$\boldsymbol{F_{Lj}} = q_j[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}{c}]$$

προέρχεται από γενικευμένο δυναμικό. Ο υπολογισμός του δυναμικού μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell.

Απο την εξίσωση (1.19) συμπεραίνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο προέρχεται από **διανυσματικό δυναμικό**, δηλαδή,

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{2.1}$$

οπότε ο νόμος του Faraday

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

γράφεται,

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0.$$

Αν η στροφή ενός διανύσματος είναι μηδέν τότε υπάρχει αριθμητική συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

ή

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.2}$$

όπου φ είναι το **ηλεκτροστατικό δυναμικό**.

Με βάση όλα τα παραπάνω η δύναμη Lorentz γράφεται

$$\boldsymbol{F_{Lj}} = -q_j\nabla\varphi - \frac{q_j}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{q_j}{c}[(\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{v}].$$

Συμπαιρένουμε ότι δύναμη Lorentz προερχεται απο το δυναμικό

$$F_{Lj} = q_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{v}}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\right]$$

όπου

$$V = \varphi - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}}{c}$$

και $U_j = q_j V$ είναι η δυναμική ενέργεια.

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται,

$$\boxed{L_j = T_j - U_j = \tfrac{m_j v^2}{2} + \tfrac{q_j}{c}[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}] - q_j\varphi.} \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από το χρόνο άρα η ολική ε-νέργεια του φορτίου διατηρείται σταθερά

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_j v^2 + q_j \varphi.$$

Το διανυσματικό δυναμικό δεν εμφανίζεται στη ολική ενέργεια γιατί ο όρος που εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο στην δύναμη Lorentz είναι κάθετος στην ταχύτητα.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε και από την εξίσωση του Νεύτωνα. Πολαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.17) με την ταχύτητα έχουμε

$$m_j \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q_j \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} + \frac{q_j}{c}[\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]$$

ή

$$\frac{d(m_j v^2/2)}{dt} = -q_j \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi.$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi$$

και επειδή το ηλεκτροστατικό δυναμικό δεν εξαρτάται από το χρόνο έχουμε

$$\frac{d(m_j v^2/2 + q_j \varphi)}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Από τη συνάρτηση Lagrange μπορούμε να υπολογίσουμε και τις γενικευμένες ορμές,

$$p_x = \frac{\partial L_j}{\partial v_x} = m_j v_x + q_j A_x \tag{2.4}$$

$$p_y = \frac{\partial L_j}{\partial v_y} = m_j v_y + q_j A_y \tag{2.5}$$

$$p_z = \frac{\partial L_j}{\partial v_z} = m_j v_z + q_j A_z. \tag{2.6}$$

Όταν το φορτίο πλησιάζει τη ταχύτητα του φωτός η συνάρτηση Lagrange γράφεται

$$\boxed{L_j = -m_j c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + (q_j/c) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - q_j \varphi.} \tag{2.7}$$

(Δείξτε ότι για φορτία με ταχύτητα $v << c$ η σχετικιστική συνάρτηση Lagrange προσεγγίζει την συνάρτηση (2.3).)

2.1.2 Συνάρτηση *Hamilton*

Από τη συνάρτηση Lagrange μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση του Hamilton

$$H_j = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L_j, \tag{2.8}$$

όπου οι ταχύτητες θα υπολογίζονται από τις εξισώσεις (2.4)-(2.6)

$$v_x = \frac{p_x - q_j A_x}{m_j}$$

$$v_y = \frac{p_y - q_j A_y}{m_j}$$

$$v_z = \frac{p_z - q_j A_z}{m_j}.$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες και τη συνάρτηση Lagrange στην εξίσωση (2.8) βρίσκουμε, μετά από αλγεβρικές πράξεις, την συνάρτηση Hamilton για την κίνηση φορτίων παρουσία ηλεκρτομαγνητικού πεδίου.

$$\boxed{H_j = \frac{(\boldsymbol{p} - \frac{q_j}{c}\boldsymbol{A})^2}{2m_j} + q_j\varphi.} \tag{2.9}$$

Η συνάρτηση Hamilton για φορτία που κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες ($v \sim c$) παίρνει τη μορφή

$$\boxed{H_j = [c^2(\boldsymbol{p} - q_j\boldsymbol{A}/c)^2 + m_j^2 c^4]^{1/2} + q_j\varphi.} \tag{2.10}$$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης (2.9) και των εξισώσεων κίνησης του Hamilton

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{2.11}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{2.12}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις τροχιές των φορτίων.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μελετήσουμε την κίνηση φορτίων μέσα σε προεπιλεγμένα εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

Πρόβλημα 2.1: Δείξτε ότι η εξίσωση Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_j}{\partial \boldsymbol{p}}\right) - \left(\frac{\partial L_j}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = 0 \tag{2.13}$$

καταλήγει στην εξίσωση (1.17),

$$m_j \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q_j \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{c} \right].$$

Λύση: Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.3) και (2.13) θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$$\frac{d}{dt}(m_j \boldsymbol{v} + \frac{q_j}{c}\boldsymbol{A}) - \frac{q_j}{c}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{x}}\right) + q_j \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}} = 0.$$

Αν αντικαταστήσουμε τη διανυσματική παράγωγο με το ∇

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \nabla$$

έχουμε

$$\frac{d}{dt}(m_j \boldsymbol{v} + \frac{q_j}{c}\boldsymbol{A}) - \frac{q_j}{c}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) + q_j \nabla\varphi = 0.$$

Κάνοντας χρήση της ολικής παραγώγου

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A}$$

και της διανυσματικής ταυτότητας

$$\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

έχουμε

$$m_j \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q_j[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}] + \frac{q_j}{c}[\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})].$$

Αντικαθιστώντας το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο από τις εξισώσεις (2.1)-(2.2) καταλήγουμε στην εξίσωση (1.17).

2.2 Στατικό και ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Υποθέτουμε ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα Ox ($\boldsymbol{E} = E_0 \hat{e}_x$) ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$). Η εξίσωση κίνησης του φορτίου έχει τη μορφή

$$m_j \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q_j \boldsymbol{E}. \tag{2.14}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.14) έχουμε

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{q_j}{m_j}\boldsymbol{E}t$$

και η κινητική ενέργεια του φορτίου αυξάνει με το τετράγωνο του χρόνου (αν $v_0 = 0$)

$$\mathcal{E} = \frac{q_j^2}{2m_j}E_0^2 t^2. \tag{2.15}$$

Ο ρυθμός αύξησης της όλικής ενέργειας είναι ανάλογος του χρόνου

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q_j^2 E_0^2}{m_j}t. \tag{2.16}$$

Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για πολλές εφαρμογές στο εργαστήριο και το διάστημα η μελέτη της κίνησης ηλεκτρονίου παρουσία στατικού και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μέσα σε ομογενές και άπειρο πλάσμα πυκνότητας n_0 και θερμοκρασίας $T_e = T_i$. Υποθέτουμε ότι το πλάσμα είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία. Το ηλεκτρόνιο συγκρούεται με τα ιόντα και χάνει ορμή με ρυθμό $\nu_{ei}m_e v$, ενώ κερδίζει ενέργεια (βλέπε εξίσωση (2.15) στο χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ των συγκρούσεων (μέση ελεύθερη διαδρομή). Η εξίσωση κίνησης κατά μήκος της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου (Ox) θα έχει τη μορφή

$$m_e\frac{dv}{dt} = eE - \nu_{ei}m_e v. \tag{2.17}$$

Αν θεωρήσουμε ότι όση ενέργεια κερδίζει το ηλεκτρόνιο από το ηλεκτρικό πεδίο, τόση χάνει και από στις συγκρούσεις, τότε $dv/dt = 0$ ή

$$E = \nu_{\rm ei}m_{\rm e}v/e,$$

επειδή $\nu_{\rm ei} = n_0\pi e^4/m^2v^3$, έχουμε

$$E = \frac{n_0\pi e^3}{mv^2}. \tag{2.18}$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.18) ως προς την ταχύτητα έχουμε

$$v(E_0) = \sqrt{\frac{n_0\pi e^3}{m_e E_0}} = v_D(E) \tag{2.19}$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής v_D, γιατί αν $v > v_{\rm D}$ το φορτίο κερδίζει μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων περισσότερη ενέργεια από αυτή που χάνει άρα συνεχώς επιταχύνεται από το ηλεκτρικό πεδίο και διαφεύγει των συγρούσεων (συνεχής επιτάχυνση κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου).

Αν θέσουμε $v_D = V_\mathrm{e}$ στην εξίσωση (2.18), υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πεδίο E_D,

$$\boxed{E_\mathrm{D} = \frac{n_0 \pi e^3}{m V_\mathrm{e}^2},} \tag{2.20}$$

που ονομάζεται πεδίο Dreicer, και είναι το ηλεκτρικό πεδίο που απαιτείται για να 'διαφύγουν' τα ηλεκτρόνια με χαρακτηριστική ταχύτητα ίση με τη θερμική ταχύτητα. Από τις (2.18) και (2.20) προκύπτει

$$\frac{E}{E_\mathrm{D}} = \frac{V_\mathrm{e}^2}{v_\mathrm{D}^2} \Rightarrow v_\mathrm{D} = V_\mathrm{e} \cdot \left(\frac{E_\mathrm{D}}{E}\right)^{1/2}$$

ή

$$V_\mathrm{D} = V_\mathrm{e}\sqrt{\frac{E_\mathrm{D}}{E}}.$$

Επειδή το πλάσμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και η ανάλυση είναι κατα μήκος μιάς διάστασης Ox η κατανομή ταχυτήτων των φορτίων είναι η μονοδιάστατη κατανομή Maxwell- Boltzmann

$$f_m(v) = n_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}}. \tag{2.21}$$

Το ποσοστό των φορτίων που 'διαφεύγει', για κάθε τιμή του ηλεκτρικού πεδίου E, υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\frac{n}{n_0} = \int_{v_\mathrm{D}}^{\infty} f_m dv.$$

Αν θέσουμε $E = E_D/4$ τότε $v_D = 2V_e$ και $n/n_0 = 10^{-3}$.

2.3 Στατικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο

Μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο την κίνηση φορτίου μέσα σε σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο ($\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$) απουσία ηλεκτρικού πεδίου. Δείξαμε ότι το φορτίο εκτελεί ελικοειδή τροχιά, με σταθερό βήμα, γύρω από τις μαγνητικές γραμμές. Αν το διάνυσμα της ταχύτητας βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο επίπεδο (xy) και η ταχύτητα κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν ($v_\parallel(t = 0) = 0$) ή αν μεταφερθούμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων που κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φορτίου $v_\parallel(t = 0)$ τότε το φορτίο εκτελεί στο επίπεδο (xy) κυκλική τροχιά με ακτίνα r_L γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο, που θα ονομάζουμε **οδηγό κέντρο**. Η ολική κινητική ενέργεια του φορτίο θα είναι ίση με την αρχική της τιμή,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_\perp^2(t=0)$$

γιατί, όπως ήδη έχουμε δείξει, η ολική ενέργεια διατηρείται σταθερά κατα μήκος της τροχιάς.

Παρουσιάζει ενδιφέρον να μελετήσουμε την κίνηση φορτίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο απουσία ηλεκτρικού πεδίου με την βοήθεια της συνάρτησης Hamilton. Το διανυσματικό δυναμικό που περιγράφει το σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_0\hat{e}_z$ θα είναι $\boldsymbol{A} = -B_0 y\hat{e}_x$. Η συνάρτηση Hamilton γράφεται

$$H_j = \frac{1}{2m_j}[(p_x + \varepsilon\Omega_j m_j y)^2 + p_y^2 + p_z^2] \tag{2.22}$$

όπου $\varepsilon = 1$ για τα ιόντα και $\varepsilon = -1$ για τα ηλεκτρόνια. Η συνάρτηση Hamilton είναι ανεξάρτητη από τις θέσεις x, z άρα προκύπτει αμέσως από τις εξισώσεις Hamilton ότι οι ορμές p_x, p_z είναι ολοκληρώματα της κίνησης. Η συνάρτηση Hamilton δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο, άρα το H_j είναι επίσης ολοκλήρωμα της κίνησης. Αν θέσουμε $p_x = p_z = 0$ και $H_j = \mathcal{E}$ τότε η εξίσωση (2.22) γράφεται,

$$2m_j\mathcal{E} = \Omega_j^2 m_j^2 y^2 + p_y^2$$

ή

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{p_y^2}{b^2} = 1 \tag{2.23}$$

όπου $a^2 = 2\mathcal{E}/\Omega_j^2 m_j)$ και $b^2 = 2m_j\mathcal{E}$. Στο χώρο των φάσεων, το φορτίο διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Από την εξίσωση (2.23) υπολογίζουμε εύκολα τη συμπεριφορά του $y(t)$ και $p_y(t)$ και βλέπουμε ότι είναι ανάλογες με τις εκφράσεις που υπολογίσαμε στην παράγραφο 1.5.

Η μελέτη της κίνησης του φορτίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία απλοποιείται σημαντικά όταν γίνει με τη βοήθεια της συνάρτησης Hamilton. Καταλήγουμε εύκολα σε μια σειρά συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά της τροχιάς χωρίς να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης (αξιοποιώντας τα ολοκληρώματα κίνησης).

Η ανάλυση της κίνησης σε πολλά δυναμικά συστήματα διευκολύνεται αν διαλέξουμε το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων (όχι κατά ανάγκην αδρανειακό). Για παράδειγμα η κίνηση του φορτίου σε σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο απουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου είναι απλούστατη αν μεταφερθούμε σε ένα σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα ($v_{\|}(t=0)$) κατά μήκος του άξονα Oz και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω_j γύρω από τον ίδιο άξονα. Το φορτίο στο νέο σύστημα παραμένει ακίνητο και η λύση των εξισώσεων κίνησης είναι τετριμμένη. Η μεταφορά πίσω στο αδρανειακό σύστημα γίνεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Θα επιστρέψουμε στο θέμα όταν θα μελετήσουμε την μη γραμμική αλληλεπίδραση φορτίου κύματος στο Κεφάλαιο .....

Πρόβλημα 2.2: Μελετήστε την κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο απουσία ηλεκτρικού πεδίου, παρουσία ομογενούς πλάσματος πυκνότητας n_0 και θερμοκρασίας $T_e = T_i$. Το πλασμα βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας και εκτείνεται στο άπειρο.

Λύση: Η εξίσωση κίνησης του ηλεκτρονίου θα έχει τη μορφή

$$m_e \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] - \nu_{ei} m_e \boldsymbol{v}.$$

Υποθέτουμε ότι σε κάθε σύγκρουση ηλεκτρονίου-ιόντος χάνεται ορμή ανάλογη του $\sim m_e\boldsymbol{v}$. Ακολουθώντας τα βήματα που μας οδήγησαν στις εξισώσεις (1.55)-(1.56) έχουμε

$$\ddot{v}_x + \nu_{ei}\dot{v}_x + \Omega_e^2 v_x = 0 \tag{2.24}$$

$$\ddot{v}_y + \nu_{ei}\dot{v}_y + \Omega_e^2 v_y = 0. \tag{2.25}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (2.24)-(2.25) περιγράφουν αρμονική ταλάντωση με αντίσταση. Η δύναμη που προκαλούν οι συγκρούσεις ($-m_j v \nu_{ei}$) δεν προέρχεται από δυναμικό. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του πλάσματος και η θερμοκρασία είναι τέτοιες ώστε $\nu_{ei} << \Omega_e$ (για παράδειγμα στο ηλιακό στέμμα $n_0 \approx 10^{10} cm^{-3}$, $B_0 = 100G$ και $T_e \approx 100eV$ έχουμε $\nu_{ei} \approx 30 sec^{-1} << \Omega_e \approx 10^9 sec^{-1}$). Αν αναζητήσουμε στις εξισώσεις (2.24)-(2.25) λύσεις της μορφής

$$v_x = v_{x0} e^{i\omega t} \tag{2.26}$$

έχουμε

$$-\omega^2 + i\nu_{ei}\omega + \Omega_e^2 = 0 \tag{2.27}$$

για $\nu_{ei} = 0$ βρίσκουμε τη γνωστή μας λύση $\omega = \Omega_e$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι (1) $\omega = \omega_r + i\gamma$, όπου ω_r είναι το πραγματικό μέρος της ταλάντωσης (που σύμφωνα με όσα είπαμε μέχρι τώρα είναι πολύ κοντά στο Ω_e) και γ το φανταστικό και (2) $\omega_r >> \gamma$, θα έχουμε

$$-(\omega_r^2 + 2i\gamma\nu_{ei}) + i(\omega_r + i\gamma)\nu_{ei} + \Omega_e^2 = 0.$$

Λύνοντας στη συνέχεια τη μιγαδική εξίσωση υπολογίζουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συχνότητας ω,

$$\omega_r^2 = \Omega_e^2 - \gamma\nu_{ei} \approx \Omega_e^2$$

και

$$\gamma = \nu_{ei}/2$$

ή $\omega = \Omega_e + i(\nu_{ei}/2)$. Αντικαθιστώντας το ω στην εξίσωση (2.26) θα έχουμε

$$v_x = v_{x0}e^{\nu_{ei}t/2}e^{i\Omega_e t}$$

όμοια για το v_y θα έχουμε

$$v_y = v_{y0}e^{\nu_{ei}t/2}e^{i\Omega_e t}.$$

Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου ακολουθεί μια φθίνουσα αρμονική ταλάντωση, ενώ η ολική του ενέργεια

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e|v|^2 = \frac{1}{2}m_e v_0 e^{\nu_{ei}t}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρόνιο χάνει με πολύ αργούς ρυθμούς ($\tau \sim 1/\nu_{ei}$) ενέργεια η οποία μεταφέρεται στα ιόντα μέσω των συγκρούσεων.

2.4 Μαγνητική ροπή

Εάν το φορτίο έχει αρχικά ταχύτητα $v_\parallel = 0$, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την κίνησή του μέσα στο σταθερό μαγνητικό πεδίο έχει μαγνητική ροπή $\mu_\mathrm{m} = IS/c$, όπου I είναι το ρεύμα που δημιουργεί το περιστρεφόμενο φορτίο ($I = q\Omega_j/2\pi$) και S είναι η επιφάνεια που περικλείει το ρεύμα ($S = \pi r_{\mathrm{L}j}^2$). Αντικαθιστώντας το S και I στην εξίσωση της μαγνητικής ροπής και παίρνοντας υπόψη ότι το $r_{\mathrm{L}j} = v_\perp/\Omega_j$ υπολογίζουμε τη μαγνητική ροπή

$$\boxed{\mu_{\mathrm{m}j} = \frac{m_j v_\perp^2/2}{B_0}} \tag{2.28}$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}j} = (q_j/2c)(\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}j} \times \boldsymbol{v}) \tag{2.29}$$

Η μαγνητική ροπή (2.28) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη μελέτη της κίνησης φορτίων μέσα σε ανομοιογενή μαγνητικά πεδία και θα αποδείξουμε αργότερα ότι είναι μια κατά προσέγγιση σταθερή της κίνησης (αδιαβατική αναλλοίωτη).

2.5 Ολίσθηση σε στατικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο

Υποθέτουμε ότι το ομογενές και στατικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο έχει τη διεύθυνση του άξονα Oz, ενώ στο φορτίο εφαρμόζεται μια σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}$. Η εξίσωση της κίνησης του φορτίου γράφεται

$$m_j(d\boldsymbol{v}/dt) = (q_j/c)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{F}. \tag{2.30}$$

Αναλύοντας την διανυσματική εξίσωση (2.30) στη παράλληλη και κάθετη συνιστώσα του του μαγνητικού πεδίου έχουμε,

$$m_j(d\boldsymbol{v}_\parallel/dt) = \boldsymbol{F}_\parallel \tag{2.31}$$

και

$$m_j(d\boldsymbol{v}_\perp/dt) = (q_j B_0/c)(\boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}) + \boldsymbol{F}_\perp. \tag{2.32}$$

Αναλύοντας επίσης την ταχύτητα $\boldsymbol{v}_\perp$ σε δύο συνιστώσες $\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}^F_{\mathrm{D}j}$, όπου

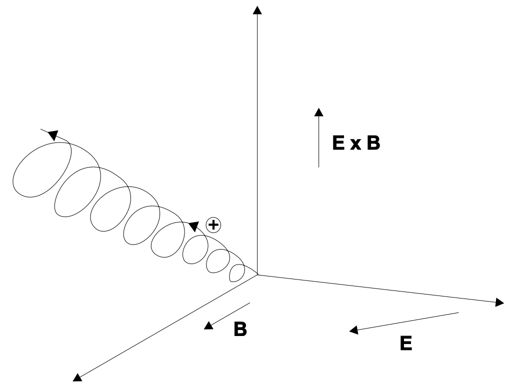
$$\boldsymbol{w}^F_{\mathrm{D}j} = (c/q_j)(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B})/B_0^2 \tag{2.33}$$

και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (2.32) βρίσκουμε ότι

$$m_j(d\boldsymbol{u}/dt) = (q_j/c)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.34}$$

δηλαδή το φορτίο εκτελεί μία κυκλική περιοδική τροχιά (αν $v_\parallel = F_\parallel = 0$) σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{w}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{D}j}$. Η ταχύτητα $w^{\mathrm{F}}_{\mathrm{D}j}$ ονομάζεται **ταχύτητα ολίσθησης** και γενικά εξαρτάται από το φορτίο του σωματιδίου. Το οδηγό κέντρο κινείται με ταχύτητα w^F_{Dj} (Σχ. 2.1). Η κίνηση του οδηγού κέντρου φαίνεται να μην ακολουθεί τους νόμους του Νεύτωνα και να αντιδρά διαφορετικά στις εξωτερικές δυνάμεις $\boldsymbol{F}_\parallel$ και $\boldsymbol{F}_\perp$. Επιταχύνεται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών και κινείται με σταθερή ταχύτητα κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές.

Δύο είδη σταθερών εξωτερικών δυνάμεων έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη φύση: (1) το σταθερό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ($\boldsymbol{F}_j = q_j\boldsymbol{E}$) και



Σχήμα 2.1. Κίνηση φορτίου μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Το φορτίο εκτελεί παράλληλα δύο κινήσεις, μία περιοδική γύρω από το οδηγό κέντρο και μία ολίσθηση μαζί με το οδηγό κέντρο με σταθερή ταχύτητα w_{Dj}^{E}.

(2) το πεδίο βαρύτητας ($\boldsymbol{F}_j = m_j \boldsymbol{g}$). Η ταχύτητα ολίσθησης του φορτίου μέσα σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} = c(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})/B_0^2.} \tag{2.35}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα κινούνται με την **ίδια ταχύτητα**. Αν στο πλάσμα εφαρμοσθεί ένα στατικό και ομογενές ηλεκτριό πεδίο, μπορούμε να μεταφερθούμε σε ένα νέο σύστημα αναφοράς (που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}}$), στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδέν.

Η ταχύτητα ολίσθησης μέσα στο πεδίο βαρύτητας παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{\mathrm{Dj}}^{\mathrm{g}} = (cm_j/q_j)(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{B}_0)/B_0^2,} \tag{2.36}$$

όπου $\boldsymbol{g}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και δημιουργούν ρεύμα πυκνότητας $\boldsymbol{J} = n_0 e(\boldsymbol{w}_{\mathrm{Dj}}^{\mathrm{g}} - \boldsymbol{w}_{\mathrm{De}}^{\mathrm{g}})$. Τα ρεύματα αυτά διεγείρουν τη βαρυτική αστάθεια στο πλάσμα αλλά στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στο πέμπτο κεφάλαιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1. Γράψτε την εξίσωση κίνησης των φορτίων σε σχετικιστική μορφή και υπολογίστε την κίνηση ενός φορτίου μέσα σε στατικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο. Υπάρχει διαφορά από τις γνωστές μη σχετικιστικές λύσεις;

2.2. Δείξτε ότι κατά την κίνηση ενός φορτίου q μέσα σε ομογενές και ανεξάρτητο του χρόνου ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γίνει μηδέν σε ένα σύστημα συντεταγμένων που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})/B^2$, όπου $v/c << 1$. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός αυτός δεν επηρεάζει το μαγνητικό πεδίο.

2.3. Κατά την κίνηση ενός φορτίου μέσα σε ομογενές και ανεξάρτητο του χρόνου ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο έχουμε:(1) Όταν το $B = 0$, το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί επιτάχυνση παράλληλη προς αυτό ενώ αντίθετα, (2) όταν το $B \neq 0$, προκαλείται ολίσθηση εγκάρσια προς το ηλεκτρικό πεδίο. Πώς συμβιβάζονται αυτές οι δυο διαφορετικές μορφές κίνησης, όταν $B \to 0$;

2.4. Στην ιονόσφαιρα της Γής το πλάσμα αποτελείτε από ηλεκτρόνια και πρωτόνια. Το μαγνητικό πεδίο στον ισημερινό είναι περίπου ίσο με $3 \times 10^{-5} T$. Πόσο γρήγορα κινούνται τα φορτία λόγο της βαρυτικής ολίσθησης; Προς ποια διεύθυνση κινούνται τα φορτία;