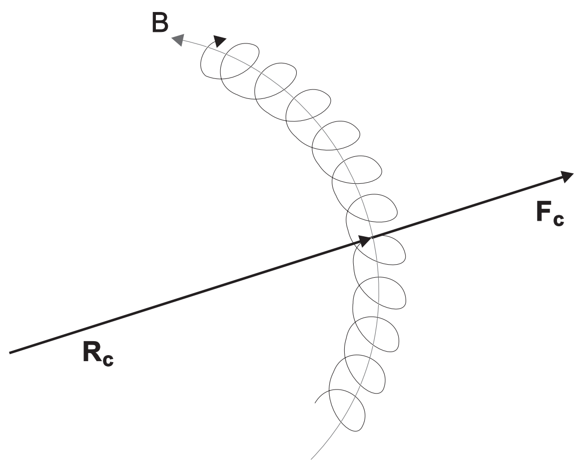
3. ΣΤΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΠΕΔΙΑ

3.1 Καμπυλότητα των μαγνητικών γραμμών



Σχήμα 3.1. Κίνηση φορτίου μέσα σε καμπυλωμένες μαγνητικές γραμμές

Εάν το στατικό, εξωτερικό, μαγνητικό πεδίο είναι καμπυλωμένο (με ακτίνα καμπυλότητας R_{c}) το οδηγό κέντρο αναγκάζεται να κινηθεί κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών, ενώ το φορτίο εκτελεί ελικοειδή κίνηση γύρω από αυτές (Σχ. 3.1). Το οδηγό κέντρο που κινείται κατά μήκος των καμπυλωμένων μαγνητικών γραμμών υφίσταται τη φυγόκεντρο δύναμη $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}} = (mv_{\parallel}^2/R_{\mathrm{c}})\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$, κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, άρα ολισθαίνει με ταχύτητα (βλέπε εξίσωση (2.33),

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}j}^{\mathrm{c}} = \frac{\boldsymbol{v}_{\parallel}^2(\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}})}{\Omega_j R_{\mathrm{c}}}} \tag{3.1}$$

όπου $\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{B}/B_0$. Την ταχύτητα αυτή θα την ονομάσουμε **ολίσθηση καμπυλότητας** και είναι διαφορετική για τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα.

3.2 Ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο

Οταν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται λίγο σε απόσταση r_{L} (δηλαδή όταν $\Delta B/r_{\mathrm{L}} << B/L$, όπου L είναι μια χαρακτηριστική γραμμική διάσταση του φυσικού συστήματος), μπορούμε να το αναπτύξουμε σε σειρά κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξεως, δηλαδή,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_0)\boldsymbol{B} + ... \tag{3.2}$$

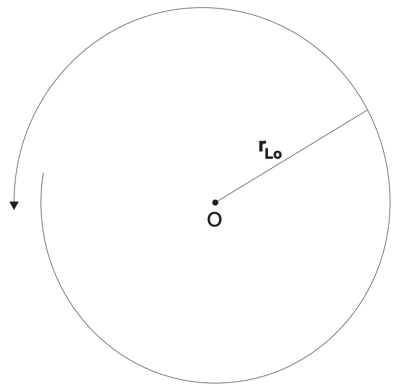
όπου το $\boldsymbol{\nabla}_0$ σημαίνει ότι η παράγωγος υπολογίζεται στο οδηγό κέντρο της τροχιάς. Επομένως η κίνηση του φορτίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ περιγράφεται από την εξίσωση (1.17), η οποία με την παραπάνω προσέγγιση γράφεται,

$$m_j(d\boldsymbol{v}/dt) = (q_j/c)[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_0)\boldsymbol{B}]. \tag{3.3}$$

Επειδή ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.3) είναι μικρός σε σχέση με τον όρο $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0$, μπορούμε να υποθέσουμε, εφαρμόζοντας τη θεωρία των διαταραχών, ότι το σωματίδιο διαγράφει μια 'σχεδόν περιοδική' τροχιά με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1$, όπου

$$m_j(d\boldsymbol{v}_0/dt) = (q_j/c)(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_0)$$

(βλέπε Σχ. 3.2). Η απόκλιση από την περιοδική τροχιά περιγράφεται από



Σχήμα 3.2. Κίνηση φορτίου σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο. Η κίνηση είναι 'σχεδόν' περιοδική.

τον όρο $\boldsymbol{v}_1$. Αντικαθιστώντας την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ στην εξίσωση (3.3) παίρνουμε

$$m_j(d\boldsymbol{v}_1/dt) = (q_j/c)(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0) + \boldsymbol{F}_j. \tag{3.4}$$

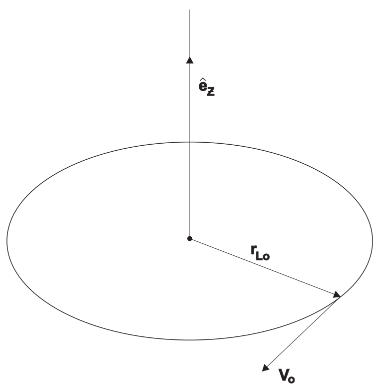
Η δύναμη $\boldsymbol{F}_j$ έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{F}_j =< (q_j/c)\boldsymbol{v}_0 \times (\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j} \cdot \boldsymbol{\nabla}_0)\boldsymbol{B} > \tag{3.5}$$

όπου $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j} + \delta\boldsymbol{r}$, το $\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j}$ είναι η ακτίνα Larmor που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο $|\boldsymbol{B}_0|$, το $\delta\boldsymbol{r}$ είναι όρος πρώτης τάξεως και ο μέσος όρος των τιμών της συνάρτησης σε μία περίοδο υπολογίζεται από τη σχέση $< f >= (\oint f dt)/T$, όπου T είναι η περίοδος της κυκλικής κίνησης του φορτίου. Η $\boldsymbol{F}_j$ είναι ίση με τη μέση τιμή της δύναμης που ασκείται στο οδηγό κέντρο λόγω της ανομοιογένειας του πεδίου.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων εφαρμόζουμε δύο γνωστές θεωρίες εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων, (1) τη θεωρία διαταραχών και (2) τη θεωρία των μέσων όρων. Με τη θεωρία των μέσων όρων απαλείφουμε τις γρήγορες κυκλοτρονικές ταλαντώσεις και μελετάμε την κίνηση του οδηγού κέντρου.

Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, (βλέπε Σχ. 3.3) και αναλύοντας το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = (B_{\mathrm{r}}, B_\theta, B_{\mathrm{z}})$ η εξίσωση (3.5) γράφεται



Σχήμα 3.3. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της δύναμης $\boldsymbol{F}_{\|j}$.

$$\boldsymbol{F}_j = F_{\|j}\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} + \boldsymbol{F}_{\perp j}. \tag{3.6}$$

Από τις τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, η B_θ είναι παράλληλη προς τη $\boldsymbol{v}_0$ και δεν συνεισφέρει στη δύναμη $\boldsymbol{F}_j$, ενώ η B_{r} συνεισφέρει στην $\boldsymbol{F}_\|$ και η B_{z} στην $\boldsymbol{F}_\perp$,

$$F_{\|j}\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} =< (q_j/c)(\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j})(\partial B_{\mathrm{r}}/\partial r) > \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{F}_{\perp j} =< (q_j/c)(r_{\mathrm{L}0j}(\partial B_{\mathrm{z}}/\partial r))(\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}) > \tag{3.8}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την κάθε συνιστώσα της δύναμης $\boldsymbol{F}_j$ χωριστά αρχίζοντας από τη συνιστώσα της δύναμης κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών.

3.2.1 Ανομοιογένεια κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών

Κάνοντας χρήση των της εξισώσης (3.7) υπολογίζουμε τη δύναμη

$$\begin{aligned} F_{\parallel j} &= \frac{q_j}{m_j} v_{0\perp} r_{L0j} \left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle_{r=0} \hat{e}_z \\ &= \frac{q_j}{m_j} \frac{v_{0\perp}^2}{\Omega_j} \left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle_{r=0} \hat{e}_z \\ &= 2 \left[\frac{(1/2) m_j v_{0\perp}^2}{B_0} \right] \left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle_{r=0} \hat{e}_z \\ &= 2\mu_m \left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle_{r=0} \hat{e}_z \end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου μ_m είναι η μαγνητική ροπή (εξίσωση (;;)).

Η εξίσωση Maxwell, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η παράγωγος $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ αλλάζει αργά κοντά στο οδηγό κέντρο ($r = 0$) τότε

$$r B_r \approx -\int r \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} \right)_{r=0} dr$$

$$B_r \approx -\frac{1}{2} r \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} \right)_{r=0}. \tag{3.10}$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (3.9) και (3.10) έχουμε

$$F_{\parallel j} = -\mu_{\mathrm{m}} \left(\frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial z} \right). \tag{3.11}$$

Το φορτίο εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις μέσα σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο ($\partial B_{\mathrm{z}}/\partial z \neq 0$), την κυκλική, με συχνότητα ($q_j B_0/m_j c$)

και ακτίνα Larmor $r_{\mathrm{L}0j}$, γύρω από το οδηγό κέντρο το οποίο κινείται αργά με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1$ σύμφωνα με την εξίσωση

$$\boxed{m_j \left(\frac{dv_{\|1}}{dt}\right) = -\mu_{\mathrm{m}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right).} \tag{3.12}$$

Έχουμε ήδη δείξει ότι η ολική κινητική ενέργεια φορτίων που κινούνται μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερή,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_j v_{\|}^2}{2} + \frac{m_j v_{\perp}^2}{2}\right] = 0.$$

Κάνοντας χρήση του ορισμού της μαγνητικής ροπής (βλέπε εξίσωση (;;) έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_j v_{\|}^2}{2} + \mu_m B_0\right] = 0. \tag{3.13}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.12) με τη ταχύτητα $v_{1\|}$ έχουμε

$$\frac{d(m_j v_{1\|}^2/2)}{dt} = -\mu_m \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) = -\mu_m \left(\frac{dB_z}{dt}\right). \tag{3.14}$$

Συνδυάζοντας τις εξισωσεις (3.13) και 3.14) συμπεραίνουμε ότι η μαγνητική ροπή παραμένει σταθερή,

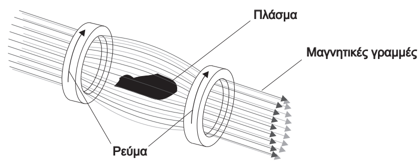
$$\frac{d\mu_m}{dt} \approx 0,$$

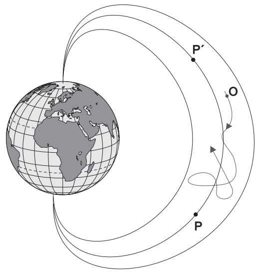
όταν το φορτίο κινείται μέσα σε ανομοιογενή μαγνητικά πεδία που υπακούουν στη σχέση ($|\nabla B/B| << r_{\mathrm{L}j}/L$). Η μαγνητική ροπή είναι ένα παράδειγμα αδιαβατικής αναλλοίωτης και θα το συζητήσουμε αναλυτικά στην παράγραφο 2.5.

Ένα σημαντικό απότέλεσμα που προκύπτει από τη σταθερότητα της μαγνητικής ροπής είναι και η παγίδευση των φορτίων στις μαγνητικές φιάλες (Σχ.3.4α) ή στο μαγνητικό δίπολο της Γης (Σχ. 3.4β), που απότελούν κλασικά παραδείγματα μαγνητικών πεδίων που μεταβάλλονται αργά κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών.

Εάν ένα φορτίο με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ βρίσκεται αρχικά στο σημείο O (το μαγνητικό πεδίο έχει ελάχιστο στο σημείο O), και εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μαγνητικής ροπής βρίσκουμε ότι

$$\frac{m_j v_{\perp 0}^2/2}{B_{\min}} = \frac{m_j v_{\perp}^2/2}{B}$$





Σχήμα 3.4. (α) Το μαγνητικό πεδίο της μαγνητικής φιάλης και (β) το μαγνητικό πεδίο της Γης

και εάν το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία α με τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου τότε

$$\frac{m_j v^2 \sin^2 \alpha_0/2}{B_{\min}} = \frac{m_j v^2 \sin^2 \alpha/2}{B}. \tag{3.15}$$

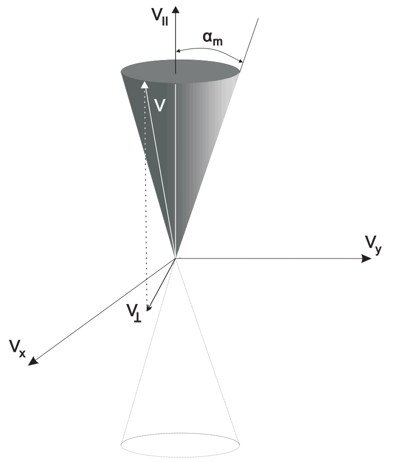
Η γωνία α λέγεται 'γωνία κλίσης' (pitch angle). Από την εξίσωση (3.15) συμπεραίνουμε ότι, όταν το φορτίο πλησιάζει τη περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρό, η τιμή της γωνίας κλίσης α μεταβάλλεται, ώστε να διατηρείται η μαγνητική ροπή σταθερή, δηλαδή

$$\sin^2 \alpha = \left[\frac{B}{B_{\min}}\right] \sin^2 \alpha_0. \tag{3.16}$$

Στο σημείο P του Σχ.3.4, όπου το $\alpha = 90^{\mathrm{o}}$, το φορτίο 'ανακλάται' και επιστρέφει στο σημείο Ο. Το ίδιο θα συμβεί και στο συμμετρικό του σημείου ανάκλασης P', με απότέλεσμα το φορτίο να παραμένει παγιδευμένο στη μαγνητική φιάλη ή στο μαγνητικό δίπολο της Γης. Στο μαγνητικό δίπολο της Γης οι περιοχές παγίδευσης φορτίων ονομάζονται Ζώνες Van-Allen, προς τιμή του αμερικανού επιστήμονα που τις ανακάλυψε μέσα στη δεκαετία του ′60. Εάν το μαγνητικό πεδίο έχει μέγιστη τιμή $B_{\max}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη γωνία στο σημείο Ο για να 'ανακλαστεί' το φορτίο πριν φτάσει στο μέγιστο μαγνητικό πεδίο. Θα πρέπει η γωνία κλίσης στο σημείο που το μαγνητικό πεδίο είναι ελάχιστο να είναι μεγαλύτερη από

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \sin^{-1}\left(\frac{B_{\min}}{B_{\max}}\right)^{1/2}. \tag{3.17}$$

Τα φορτία των οποίων η γωνία κλίσης είναι μικρότερη από a_{m} θα διαφύγουν στα τοιχώματα της μαγνητικής φιάλης ή από τις ζώνες van Allen και θα εισχωρήσουν στην ατμόσφαιρα της Γης. Η αλληλεπίδραση φορτίων



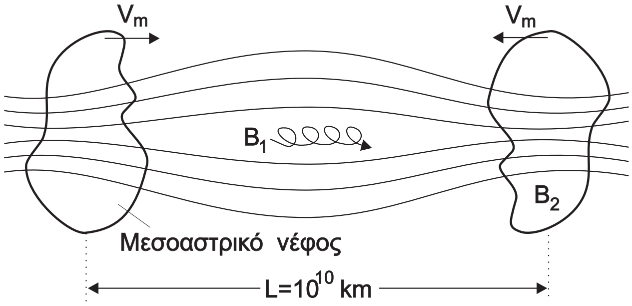
Σχήμα 3.5. Γωνιακή κατανομή ταχυτήτων των φορτίων που παγιδεύονται ή διαφεύγουν από τη μαγνητική φιάλη ή το μαγνητικό δίπολο της Γης. Φορτία με γωνία κλίσης μικρότερη από α_m διαφεύγουνε από τη μαγνητική 'φιάλη' για το λόγο αυτό ο κώνος που σχηματίζεται λέγεται κώνος διαφυγής (loss cone).

υψηλής ενέργειας που διέφυγαν από τις ζώνες van Allen με τα υψηλότερα στρώματα της ατμόσφαιρας δημιουργούν το Πολικό Σέλας. Η γωνιακή κατανομή ταχυτήτων για τα φορτία που παγιδεύονται φαίνεται στο Σχ. 3.5. Όλα τα φορτία με αρχική γωνία $\alpha \leq \alpha_m$ διαφεύγουν από τη μαγνητική φιάλη, και ο κώνος που σχηματίζεται ονομάζεται 'κώνος διαφυγής.'

Συνοψίζοντας όσα αναφέραμε πιο πάνω θα λέγαμε ότι τα φορτία που κινούνται μέσα σε μαγνητικά πεδία που μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση z επιβραδύνονται κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου αν $\partial B_{\mathrm{z}}/\partial z > 0$, ενώ η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας αυξάνει έτσι, ώστε η ολική ταχύτητα να παραμένει σταθερή. Μερικά φορτία θα φτάσουν μέχρι το σημείο που η τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι τέτοια, ώστε το $a = 90^{\mathrm{o}}$ και θα 'ανακλαστούν' (δηλαδή θα κινηθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση).

Πρόβλημα 2.3: Ένα ιόν στο διάστημα παγιδεύεται μεταξύ δύο μαγνητικών καθρεφτών (βλέπε Σχήμα 3.6) με $(B_{\mathrm{min}}/B_{\mathrm{max}}) = 1/5$ και αρχική ενέργεια 1 keV ($v_\perp = v_\parallel$ στο κέντρο). Κάθε 'καθρέφτης' κινείται με ταχύτητα $v_{\mathrm{m}} = 10$km/sec.

(α) Υπολογίστε την ενέργεια που θα κερδίσει το ιόν, μέσω ανακλάσεων, πριν διαφύγει από τους δύο 'καθρέφτες'.



Σχήμα 3.6. Επιτάχυνση Fermi των κοσμικών ακτίνων.

(β) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να αποκτήσει αυτήν την ενέργεια; (Υποδείξεις: (1) Θεωρήστε αρχικά ότι οι κινούμενοι μαγνητικοί καθρέφτες είναι κινούμενοι ‘τοίχοι’. (2) Υπολογίστε τον αριθμό των συγκρούσεων που είναι αναγκαίες. (3) Υπολογίστε το χρόνο T που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση L πολλές φορές.)

Λύση: Όλες οι ταχύτητες των φορτίων θα αναφέρονται στο κέντρο των δύο μαγνητικών καθρεφτών και οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχικές και τελικές καταστάσεις αντίστοιχα.
(α) Αρχικά $v_{\perp\mathrm{i}} = v_{\|\mathrm{i}}$, και επειδή η μαγνητική ροπή ($\mu = mv_\perp^2/2B$) διατηρείται σταθερή, τότε $v_{\perp\mathrm{f}} = v_{\perp\mathrm{i}}$, και μόνο η παράλληλη συνιστώσα $v_\|$ θα μεταβάλλεται κατά την κίνηση του ιόντος έως ότου η γωνία κλίσης a πάρει τη χαρακτηριστική τιμή

$$a_\mathrm{m} = \sin^{-1}\left[\frac{B_\mathrm{min}}{B_\mathrm{max}}\right]^{1/2}$$

και το φορτίο διαφεύγει από τους μαγνητικούς καθρέφτες. Από τη σχέση αυτή έχουμε

$$\sin^2 a_\mathrm{m} = \frac{v_{\perp\mathrm{f}}^2}{v_{\perp\mathrm{f}}^2 + v_{\|\mathrm{f}}^2} = \frac{1}{1 + v_{\|\mathrm{f}}^2/v_{\perp\mathrm{i}}^2} = \frac{1}{5}.$$

Αρα ο λόγος $v_{\|\mathrm{f}}^2/v_{\perp\mathrm{i}}^2 = 4$ και $v_{\|\mathrm{f}} = 2v_{\perp\mathrm{i}}$. Η τελική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση

$$E_\mathrm{f} = \frac{1}{2}M(v_{\|\mathrm{f}}^2 + v_{\perp\mathrm{f}}^2) = \frac{1}{2}M(4+1)v_{\perp\mathrm{i}}^2 = \frac{5}{2}Mv_{\perp\mathrm{i}}^2,$$

ενώ η αρχική

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}M(v_{\|\mathrm{i}}^2 + v_{\perp\mathrm{i}}^2) = \frac{1}{2}M(1+1)v_{\perp\mathrm{i}}^2 = Mv_{\perp\mathrm{i}}^2.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο $E_\mathrm{f}/E_\mathrm{i} = 2.5$ και συνεπώς, η τελική ενέργεια είναι $E_\mathrm{f} = 2.5E_\mathrm{i} = 2.5$ keV.

(β) Αν ακολουθήσουμε τις υποδείξεις τότε: όταν το φορτίο κινείται με θετική ταχύτητα, ενώ ο 'μαγνητικός καθρέφτης' κινείται με ταχύτητα $v_\mathrm{m} < 0$, το φορτίο συγκρούεται μαζί του και η κρούση είναι ελαστική στο σύστημα αναφοράς του καθρέφτη. Έτσι το φορτίο θα επιστρέψει με την ίδια ταχύτητα $v_0 < 0$. Αν τα μεγέθη στο σύστημα αναφοράς του καθρέφτη είναι τονούμενα, τότε οι αρχικές ταχύτητες σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι

$$v'_\mathrm{i} = v_0 - v_\mathrm{m} \quad \text{και} \quad v'_\mathrm{f} = -(v_0 - v_\mathrm{m}),$$

όπου $v_\mathrm{m} < 0$. Αν κάνουμε ένα μετασχηματισμό στο σύστημα αναφοράς του φορτίου, τότε

$$v_\mathrm{f} = v'_\mathrm{f} + v_\mathrm{m} = -v_0 + 2v_\mathrm{m},$$

και αφού η v_m είναι αρνητική, τότε η μεταβολή της ταχύτητας είναι

$$|v_\mathrm{f}| - |v_0| = 2|v_\mathrm{m}|.$$

Η μεταβολή αυτή αναφέρεται στην παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας του ιόντος για μία σύγκρουση, άρα η μεταβολή της ορμής ανά σύγκρουση είναι

$$\Delta p_\| = 2M|v_\mathrm{m}|.$$

Αν N το πλήθος των συγκρούσεων, τότε

$$p_{\|\mathrm{f}} - p_{\|\mathrm{i}} = N\Delta p_\| \Rightarrow N = \frac{v_{\|\mathrm{f}} - v_{\|\mathrm{i}}}{2v_\mathrm{m}}.$$

Όμως $v_{\|\mathrm{f}} = 2v_{\perp\mathrm{i}}$ και $v_{\|\mathrm{i}} = v_{\perp\mathrm{i}}$, άρα $N = 1/2(v_{\perp\mathrm{i}}/v_\mathrm{m})$.

Από την αρχική ενέργεια $E_\mathrm{i} = 1$ keV μπορούμε να υπολογίσουμε την $v_{\perp\mathrm{i}}$ ως εξής

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}M(v_{\perp\mathrm{i}}^2 + v_{\|\mathrm{i}}^2) = Mv_{\perp\mathrm{i}}^2 \Rightarrow v_{\perp\mathrm{i}} = 3.1\times 10^5 \mathrm{m/sec},$$

όπου $M = 1.6\times 10^{-27}$ kg η μάζα του ιόντος και $E_\mathrm{i} = 1.6\times 10^{-16}$ Joules.

Άρα το πλήθος των συγκρούσεων είναι

$$N \approx \frac{1}{2}\frac{v_{\perp \mathrm{i}}}{v_{\mathrm{m}}} = 15,$$

όπου $v_{\mathrm{m}} = 10^4$ m/sec.

Ο χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει την απόσταση L, N φορές είναι $T = NL/ < v_{\|} >$, όπου $< v_{\|} >$ η μέση ταχύτητα του ιόντος που δίνεται από τη σχέση

$$< v_{\|} >= \frac{1}{2}(v_{\|\mathrm{f}} + v_{\|\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}(2v_{\perp \mathrm{i}} + v_{\perp \mathrm{i}}) = \frac{3}{2}v_{\perp \mathrm{i}} = 4.6 \times 10^5 \mathrm{m/sec}.$$

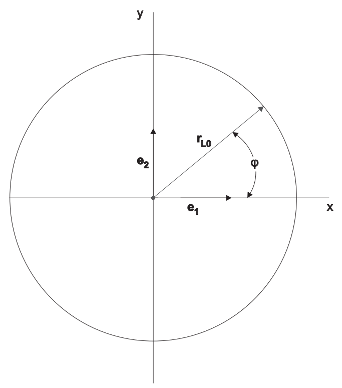
Άρα $T = 3.2 \times 10^8$ sec.

Μία πιο ακριβής απάντηση θα μπορούσε να δοθεί στηριζόμενη στο γεγονός ότι καθώς οι καθρέφτες κινούνται, το μήκος L μεταβάλλεται στο χρονικό διάστημα T κατά $\Delta L = 2v_{\mathrm{m}}T = 6.4 \times 10^{12}$ m. Άρα ο χρόνος θα είναι $T = \Delta LN/ < v >= 2.5 \times 10^8$ sec.

3.2.2 Ανομοιογένεια κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές

Ας γυρίσουμε τώρα στη μελέτη της κάθετης δύναμης $\boldsymbol{F}_{\perp j}$ (εξίσωση 3.8). Τα διανύσματα $\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j}$, $\boldsymbol{v}_0$ και $\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$ απότελούν ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (Σχ. 3.3) άρα $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = -(\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j}/r_{\mathrm{L}0j})v_0$ και η εξίσωση (3.8) γράφεται

$$\boldsymbol{F}_{\perp j} = -(|q_j|/c)v_0 \left\langle \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j}\frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial r} \right\rangle . \tag{3.18}$$



Σχήμα 3.7. Το καρτεσιανό σύστημα για των υπολογισμό της $\boldsymbol{F}_{\perp}$

Ο υπολογισμός της ποσότητας $< \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j} \frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial r} >$ γίνεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε ένα κατάλληλα επιλεγμένο διδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ και γράψουμε το διάνυσμα της ακτίνας Larmor (βλέπε Σχ. 3.7) στη μορφή

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}0j} = r_{\mathrm{L}0j} \cos\phi \boldsymbol{e}_1 + r_{\mathrm{L}0j} \sin\phi \boldsymbol{e}_2.$$

Είναι γνωστό ότι όταν

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

η παράγωγος $(\partial/\partial r)$ αναλύεται

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y}.$$

Διαλέγουμε το μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε $(\partial B_{\mathrm{z}}/\partial y) = 0$, δηλαδή $\boldsymbol{B} = B(x)\boldsymbol{e}_3$. Επειδή $< \sin\phi\cos\phi >= 0$ και $< \cos^2\phi >= 1/2$ η εξίσωση (2.33) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\perp j} &= -(|q_j|/c) v_0 r_{\mathrm{L}0j} \boldsymbol{e}_1 < \cos^2\phi > \frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial x} \\ &= -\frac{|q_j| v_0 r_{\mathrm{L}0j}}{2c}\frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 = -\mu_{\mathrm{m}}\frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial x}\boldsymbol{e}_1. \end{aligned}$$

Στο παράδειγμα που συζητήσαμε το μαγνητικό πεδίο είχε τη μορφή $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_{\mathrm{z}}(x))$, μπορούμε όμως να γενικεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα γράφοντας την κάθετη δύναμη

$$\boldsymbol{F}_{\perp j} = -\frac{\mu_{\mathrm{m}}}{2B}\boldsymbol{\nabla}_{\perp} B^2, \tag{3.19}$$

δεδομένου ότι $B_x(0) = B_y(0) = 0$.

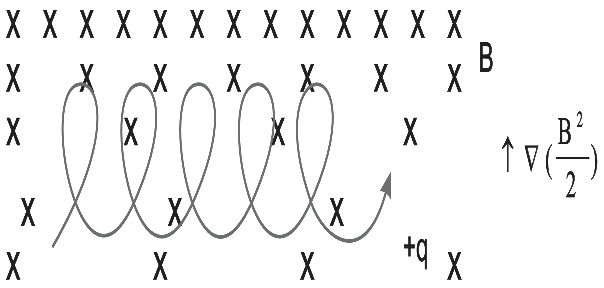
Άρα η ανομοιογένεια κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου θα προσθέσει μια νέα ολίσθηση κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές (βλέπε Σχ. 3.8) της οποίας η ταχύτητα είναι

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}j}^{\nabla\mathrm{B}} = -\left(\frac{c}{q_j}\right)\left(\frac{\mu_{\mathrm{m}}}{B}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\perp}(B^2/2)\times\boldsymbol{B}}{B^2}\right).} \tag{3.20}$$

Το φορτίο εκτελεί κυκλική κίνηση στο σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα

$$\boldsymbol{v_{\tau}} = v_{\parallel 1} + \boldsymbol{w}_{\mathrm{D}j}^{\nabla\mathrm{B}},$$

όπου $v_{\parallel 1}$ δίνεται από την εξίσωση (3.12) ενώ το $\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}j}^{\nabla\mathrm{B}}$ από την εξίσωση (3.20).



Σχήμα 3.8. Η ανομοιογένεια του μαγνητικού πεδίου αναγκάζει το φορτίο να ολισθήσει κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές.

Στην παράγραφο (2.2.3) συζητήσαμε την ολίσθηση καμπυλότητας, ενώ σε αυτή την παράγραφο μελετήσαμε την ολίσθηση λόγω ανομοιογένειας κάθετα προς τη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών. Τα μαγνητικά πεδία στο κενό παρουσιάζουν και τις δύο ολισθήσεις ταυτόχρονα, γιατί η καμπύλωση των μαγνητικών γραμμών συνοδεύεται και από ανομοιογένεια του πεδίου κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές. Θεωρούμε ένα καμπυλομένο μαγνητικό πεδίο με $B = B_\theta(r)\boldsymbol{e}_\theta$. Για το κενό ισχύει ότι $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0$, άρα

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})_{\mathrm{z}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) = 0 \tag{3.21}$$

συνεπώς βρίσκουμε την ανομοιογένεια στο $B_\theta \propto (1/R_{\mathrm{c}})$, όπου R_{c} είναι η ακτίνα καμπυλότητας του πεδίου, από την οποία προκύπτει

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}_\perp B^2}{B^2} = -\frac{\boldsymbol{R}_c}{R_c^2}$$

Αντικαθιστώντας το $\boldsymbol{\nabla}_\perp B^2/B^2$ στην εξίσωση (3.20) και προσθέτοντας την ολίσθηση καμπυλότητας (εξίσωση 3.1) έχουμε

$$\boxed{\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}j}^{\nabla\mathrm{B+c}} = \frac{m_j c}{q_j}\frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}} \times \boldsymbol{B}}{R_{\mathrm{c}}^2 B^2}\left[v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right].} \tag{3.22}$$

Πρόβλημα 2.4: Ένα σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει κινητική ενέργεια U και η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία θ με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου περιγράφεται από τη σχέση $\boldsymbol{B} = B_0(1 + ax)\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$, όπου B_0 και a είναι θετικές σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το οδηγό κέντρο βρίσκεται στη θέση ($x = x_0$, $y = z = 0$), όπου το $x_0 > 0$.

(α) Να βρεθεί η ακτίνα Larmor αυτου του φορτίου.
(β) Να βρεθεί η μαγνητική ροπή του φορτίου (μέγεθος και διεύθυνση).
(γ) Τι περιορισμούς πρέπει να θέσουμε ώστε η μαγνητική ροπή να είναι σχεδόν σταθερή;
(δ) Εάν ένα επίπεδο τοποθετηθεί στο σημείο $z = z_0$, υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου που θα συναντήσει το οδηγό κέντρο το επίπεδο $z = z_0$.
(ε) Κατασκευάστε ένα ηλεκτρικό πεδίο που θα αναγκάσει το οδηγό κέντρο του φορτίου να χτυπήσει το επίπεδο $z = z_0$ στο σημείο $x = x_0$, $y = 0$ τη χρονική στιγμή $t = \tau$.

Λύση: (α) Η ακτίνα Larmor

$$r_\mathrm{L} = \frac{v_\perp}{\Omega}, \quad \text{όπου} \quad \Omega = \frac{\mid q \mid B}{mc},$$

η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίση με

$$v_\perp = |\boldsymbol{v}| \sin\theta$$

και η ολική ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2} m|\boldsymbol{v}|^2 = U \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\frac{2U}{m}},$$

άρα

$$r_\mathrm{L} = \frac{\sqrt{\frac{2U}{m}}\sin\theta}{\left(\frac{|q|B}{mc}\right)} = \frac{c}{\mid q \mid}\sqrt{2Um}\frac{\sin\theta}{B_0(1+ax_0)}.$$

(β)

$$\boldsymbol{\mu} = -|\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{e}_\mathrm{z} = -\mu\boldsymbol{e}_\mathrm{z}$$

και

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{m}{2}\left(\frac{2U}{m}\right)\frac{\sin^2\theta}{B_0(1+ax_0)} = \frac{U\sin^2\theta}{B_0(1+ax_0)}.$$

(γ) Η συνθήκη που πρέπει να επαληθεύεται είναι

$$\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x} >> r_\mathrm{L}^{-1},$$

δηλαδή η χωρική μεταβολή του πεδίου να είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα Larmor ή

$$\frac{a}{1+ax_0} >> \frac{c}{|q|}\sqrt{2Um}\frac{\sin\theta}{B_0(1+ax_0)}$$

και

$$\alpha >> \frac{c}{|q|}\sqrt{2Um}\frac{\sin\theta}{B_0}.$$

(δ) Στο φορτίο που κινείται κατά μήκος του ανομοιογενούς πεδίου $B(x)$ θα επιδράσει μία δύναμη

$$\boldsymbol{F}_{\nabla \mathrm{B}} = -\mu_{\mathrm{m}}\frac{\partial B_{\mathrm{z}}}{\partial x}\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = -\mu B_0 a \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}},$$

άρα η ολίσθηση θα είναι

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\nabla \mathrm{B}} = \frac{c}{qB}\boldsymbol{F}_{\nabla \mathrm{B}} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \frac{-c\mu a}{q(1+ax_0)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}},$$

όπου

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = -\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}},$$

άρα

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\nabla \mathrm{B}} = \frac{c\mu a}{q(1+ax_0)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}.$$

Το σημείο που συναντάει το επίπεδο το οδηγό κέντρο έχει τις συντεταγμένες $z = z_0$, $x = x_0$ και $y = w_{\mathrm{D}}^{\nabla \mathrm{B}} \cdot t + y_0$, όπου

$$t = \frac{z_0}{v_{\|}} = \frac{z_0}{|\boldsymbol{v}|\cos\theta} = \frac{z_0}{\sqrt{\frac{2U}{m}}\cos\theta},$$

άρα

$$y = \frac{c\mu a}{q(1+ax_0)} \cdot \frac{z_0}{\sqrt{\frac{2U}{m}}\cos\theta}.$$

(ε) Επειδή θέλουμε το φορτίο να παραμείνει στην αρχική του θέση, θα πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να αναστρέψει την ολίσθηση που προκαλεί η ανομοιογένεια του πεδίου. Δηλαδή θα πρέπει

$$\boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = -\left(\mu(\frac{\partial B}{\partial x})\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}\right) \times \boldsymbol{B}.$$

Υπολογίζουμε το $|\boldsymbol{E}|$ και τη γωνία β που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με τον άξονα z. Η κίνηση του φορτίου υπολογίζεται από την εξίσωση

$$m\frac{dv_{\rm z}}{dt} = qE\cos\beta$$

άρα

$$v_{\rm z}(t) = v_{\rm z}(0) + \frac{qE}{m}(\cos\beta)t = \frac{dz}{dt}$$

$$z(t=t) = z_0 = v_{\rm z}(0)t + \frac{qE}{2m}(\cos\beta)\; t^2$$

και άρα

$$E\cos\beta = \frac{(z_0 - \sqrt{\frac{2U}{m}}(\cos\theta)\; t)}{t^2}\frac{2m}{q}.$$

Τώρα

$$|w_{\rm D}^{\rm E}| = c\frac{E_\perp}{B} = |w_{\rm D}^{\nabla{\rm B}}| = \frac{c\mu B_0 a}{qB},$$

άρα

$$E_\perp = \frac{\mu B_0 a}{q} = E\sin\beta.$$

Έτσι παίρνουμε

$$\tan\beta = \frac{\left(\frac{\mu B_0 a}{q}\right)}{\frac{(z_0 - \sqrt{\frac{2U}{m}}(\cos\theta)\; t)}{t^2}\frac{2m}{q}},$$

$$\beta = \tan^{-1}\left\{\frac{\mu B_0 a t^2}{2m(z_0 - \sqrt{\frac{2U}{m}}(\cos\theta)t)}\right\},$$

και η ένταση του πεδίου θα είναι ίση με

$$E = \left\{\left(\frac{mB_0 a}{q}\right)^2 + \left(\frac{2m}{qt^2}\right)^2\left(z_0 - \sqrt{\frac{2U}{m}}(\cos\theta)\; t\right)^2\right\}^{1/2}.$$

3.3 Ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο και ομογενές μαγνητικό πεδίο

Η κίνηση φορτίου μέσα σε ομεγενές στατικό μαγνητικό πεδίο ($\boldsymbol{B} = B_0\hat{e}_z$) ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E_0\cos(kx)\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}$, περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{v}_{\mathrm{x}j} = \frac{q_j}{m_j}E_{\mathrm{x}}(x) + \frac{q_jB_0}{m_jc}v_{\mathrm{y}j} \tag{3.23}$$

$$\dot{v}_{\mathrm{y}j} = -\frac{q_jB_0}{m_jc}v_{\mathrm{x}j.} \tag{3.24}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (3.23)-(3.24) έχουμε

$$\ddot{v}_{\mathrm{x}j} = -\Omega_j^2 v_{\mathrm{x}j} \pm \Omega_j\frac{\dot{E}_{\mathrm{x}}(x)}{B}c \tag{3.25}$$

$$\ddot{v}_{\mathrm{y}j} = -\Omega_j^2 v_{\mathrm{y}j} - \Omega_j^2\frac{E_{\mathrm{x}}(x)}{B}c \tag{3.26}$$

Σαν πρώτη προσέγγιση θεωρούμε ότι $(\dot{E}_{\mathrm{x}}/B)c << v_{\mathrm{x}}\Omega_j$, και άρα η λύση της εξίσωσης (3.25)- είναι $x_j = x_0 + r_{\mathrm{L}0j}\cos(\Omega_j t)$. Για να βρούμε καλύτερη προσέγγιση για την τροχιά του φορτίου, αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.26) το x από το ομογενές πρόβλημα και υπολογίζουμε το μέσο όρο,

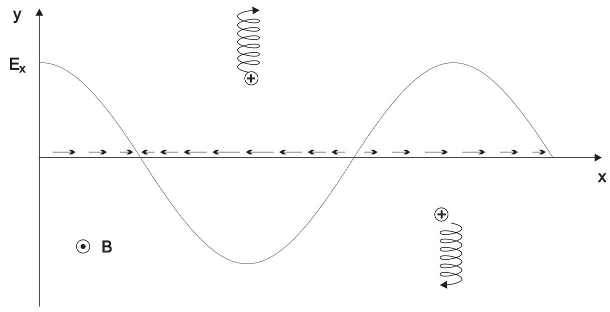
$$\begin{aligned} < \ddot{v}_{\mathrm{y}j} >= &- \Omega_j^2 < v_{\mathrm{y}j} > \\ &- \Omega_j^2\frac{E_0c}{B_0} < \cos(k(x_0 + r_{\mathrm{L}0j}\cos(\Omega_j t))) > . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τη συνιστώσα της ταχύτητας που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο. Επειδή $< \ddot{v}_{\mathrm{y}j} >\simeq 0$ (βλέπε εξίσωση (3.26) και το Σχ. 3.9), βρίσκουμε ότι

$$< v_{\mathrm{y}j} >= -\frac{E_0c}{B} < \cos(k(x_0 + r_{\mathrm{L}0j}\cos(\Omega_j t))) >$$

Αναπτύσσουμε το $\cos(k(y_0 + r_{\mathrm{L}0j}\cos(\Omega t)))$ σε άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων και στη συνέχεια, θεωρώντας $kr_{L0j} \ll 1$, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor χρησιμοποιώντας τους τύπους $\cos e = 1 - e^2/2$ και $\sin e = e$, με $e = kr_{L0j}$, και, παίρνοντας το μέσο όρο, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_{\mathrm{D}}^{\nabla\mathrm{E}} \equiv < v_{\mathrm{y}j} > &= c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}[1 - (1/4)k^2 r_{\mathrm{L}0j}^2] \\ &= \boldsymbol{w}_D^E[1 - (1/4)k^2 r_{\mathrm{L}0j}^2]. \end{aligned} \tag{3.28}$$



Σχήμα 3.9. Κίνηση φορτίου παρουσία ανομοιογενούς στατικού ηλεκτρικού και στατικού μαγνητικού πεδίου.

Η ολίσθηση w_D^E αποτελεί μια διόρθωση στην ολίσθηση που υπολογίσαμε για το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι στο ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο η ολίσθηση εξαρτάται από το είδος του σωματιδίου. Η διόρθωση αυτή ονομάζεται 'διόρθωση πεπερασμένης ακτίνας', μιας και ο όρος $k^2 r_{L0j}^2$ είναι σημαντικός όταν το μήκος κύματος της ανομοιογένειας είναι συγκρίσιμο με ή μεγαλύτερο από την ακτίνα Larmor.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.1. Ένα ομογενές πλάσμα υδρογόνου, με πυκνότητα $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{i}} = 10^{18}$ m^3 βρίσκεται σε χώρο όπου το μαγνητικό πεδίο έχει τιμή $B_0 = 1$ T και οι μαγνητικές γραμμές έχουν ακτίνα καμπυλότητας $R = 1$m. Υποτίθεται ότι όλα τα φορτία (ηλεκτρόνια και ιόντα) έχουν ενέργεια $W = 50$ eV κατανεμημένη έτσι ώστε $W_{\mathrm{i}} = W_{\mathrm{e}}$. α) Ποιοί μηχανισμοί προκαλούν ολίσθηση; Πόση είναι η ταχύτητα ολίσθησης (αθροιστικά από όλους τους μηχανισμούς); β) Αναπτύσσεται στο πλάσμα ηλεκτρικό ρεύμα; (Αν ναι, πόση είναι η πυκνότητα του; Αν όχι, γιατί;)

3.2. Αν υποθέσουμε ότι στο κέντρο μιας μαγνητικής φιάλης ελευθερώνουμε μια ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων, να βρεθεί το ποσοστό των ηλεκτρονίων που παγιδεύεται, αν το ελάχιστο μαγνητικό πεδίο είναι $B_{\min} = 200$ Gauss, ενώ το μέγιστο μαγνητικό πεδίο είναι $B_{\max} = 4000$ Gauss.