

4. ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΠΕΔΙΑ

4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο

Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου έχουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο ($\dot{B}/B \ll \Omega$). Έχουμε ήδη αναφέρει ότι κατά την κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενές και στατικό μαγνητικό πεδίο υπάρχουν δύο ολοκληρώματα της κίνησης: $(1/2mv_{\perp}^2)$ και $(1/2mv_{\parallel}^2)$. Θα δείξουμε ότι όταν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, η μαγνητική ροπή του φορτίου είναι μια κατά προσέγγιση σταθερά της κίνησης.

Το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο προκαλεί τη δημιουργία ενός ηλεκτρικού πεδίου ($\dot{\mathbf{B}} = -c\nabla \times \mathbf{E}$) που μπορεί να επιταχύνει τα φορτία. Το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο κενό είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο οπότε η ταχύτητα παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερή, ενώ στην κάθετη διεύθυνση, επειδή $m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = q\mathbf{E}$, θα έχουμε, ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp}. \quad (4.1)$$

Το φορτίο μεταβάλλει την κάθετη ενέργειά του σε μια περιστροφή κατά

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) &= q \oint \mathbf{E} d\mathbf{r}_{\perp} = q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{S} \\ &= -(q/c) \int_S \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου $d\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} dt$ και $d\mathbf{S}$ είναι το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας που περικλείεται από την τροχιά (ολοκληρώσαμε αγνοώντας τη διαταραχή). Το πεδίο αλλάζει αργά σε μια περιστροφή, άρα $\dot{B} = \delta B \frac{\Omega}{2\pi}$ και

$$\delta(\mu B) \equiv \delta \left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) = \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \right) \delta B = \mu \delta B$$

άρα $B\delta\mu = 0$, ή

$$\delta(\mu) = \delta\left(\frac{mv_{\perp}^2}{2B}\right) = 0.$$

Άρα η μαγνητική ροπή παραμένει σταθερή, όταν το $\delta B/B \ll \Omega$.

Η φυσική ερμηνεία της διατήρησης της μαγνητικής ροπής είναι εύκολη αν τη συνδέσουμε με την μαγνητική ροή που περνά μέσα από την επιφάνεια που περικλείει η τροχιά του σωματιδίου

$$\Phi = B \cdot S = B\pi r_L^2 = B\pi v_{\perp}^2 / \Omega^2 = \left(\frac{2\pi mc^2}{q^2}\right) \mu_m,$$

άρα η μαγνητική ροή Φ που περνά μέσα από την κυκλική τροχιά του φορτίου παραμένει σταθερή, και η μαγνητική ροπή μ_m παραμένει σταθερή.

Η διατήρηση της μαγνητικής ροπής σε χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο έχει αξιοποιηθεί για την 'αδιαβατική συμπίεση' του πλάσματος και αποτελεί έναν από τους τρόπους θέρμανσής του. Αυξάνοντας 'αργά' την ένταση του μαγνητικού πεδίου σε μια μηχανή πλάσματος, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας αυξάνει, άρα και η ολική ενέργεια των φορτίων αυξάνει. Εάν στη συνέχεια η τιμή του μαγνητικού πεδίου επανέλθει στην αρχική τιμή, η κάθετη ενέργεια θα επιστρέψει επίσης στην αρχική τιμή, εκτός και αν οι συγχρούσεις ισοκατανείμουν την ενέργεια μεταξύ της κάθετης και παράλληλης συνιστώσας. Η αύξηση της παράλληλης συνιστώσας της ταχύτητας είναι μη αντιστρέψιμη, όταν ελαττωθεί το μαγνητικό πεδίο, με αποτέλεσμα τη σταδιακή αύξηση της θερμοκρασίας του πλάσματος.

Η αδιαβατική **μαγνητική συμπίεση** είναι ένας τρόπος θέρμανσης του πλάσματος στο εργαστήριο και μπορεί να ερμηνεύσει πολλά αστροφυσικά φαινόμενα.

Πρόβλημα 2.5: Θεωρήστε ένα σύστημα από N αλληλεπιδρώντα ηλεκτρόνια μέσα σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο. Υποθέστε ότι αρχικά τα ηλεκτρόνια έχουν ισοτροπική κατανομή ταχυτήτων, το μέτρο της ταχύτητάς τους είναι v_0 για όλα τα ηλεκτρόνια. Εάν το μαγνητικό πεδίο αλλάζει αδιαβατικά (αργά) από την τιμή B_1 στην τιμή αB_1 με $\alpha > 1$. Υπολογίστε τις αλλαγές της ενέργειας του συστήματος.

Λύση: Η μεταβολή είναι αδιαβατική άρα η μαγνητική ροπή διατηρείται και η κάθετη στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσα της ταχύτητας του φορτίου i θα αλλάζει από την αρχική τιμή $v_{\perp 0}^i$ στην τελική $v_{\perp}^i = \sqrt{\alpha} v_{\perp 0}^i$. Η μεταβολή της ενέργειας του φορτίου i θα είναι $\Delta E^i = m(a-1)v_{\perp 0}^i/2 = E_0^i(a-1)\sin^2\theta$. Η συνάρτηση κατανομής είναι αρχικά ισοτροπική και ο

αριθμός των φορτίων που βρίσκεται μεταξύ των ταχυτήτων v_0 και $v_0 + dv_0$ και των γωνιών θ και $\theta + d\theta$ είναι

$$\frac{N}{4\pi v_0^2} 2\pi v_0^2 \sin \theta d\theta \quad (4.3)$$

για να είμαστε σίγουροι ότι η παραπάνω εκφραση είναι σωστή ολοκληρώνουμε από 0 έως π

$$\int_0^\pi (N/2) \sin \theta d\theta = N$$

άρα η ολική ενέργεια θα είναι

$$\Delta E = (N/2) E_0^i (a - 1) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = (2/3) E_0 (a - 1) \quad (4.4)$$

όπου $E_0 = N E_0^i$. Ο μηχανισμός επιτάχυνσης φορτίων που αναφέραμε σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιείται ευρύτατα για την επιτάχυνση φορτίων στην αστροφυσική.

4.2 Χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Η κίνηση φορτίων σε ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ($\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$) και χρονικά αρμονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t} \mathbf{e}_x$ περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.39α) και (2.39β), αν αντικαταστήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο με την έκφραση $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t} \mathbf{e}_x$. Οι εξισώσεις της κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$\ddot{v}_{xj} = -\Omega_j^2 \left(v_{xj} \mp \frac{i\omega}{\Omega_j} \frac{E_x}{B} c \right) \quad (4.5)$$

$$\ddot{v}_{yj} = -\Omega_j^2 \left(v_{yj} + \frac{E_x}{B} c \right), \quad (4.6)$$

το $\pm$ αναφέρεται στο είδος του φορτίου και $\dot{E}_x = i\omega E_x$. Αν ορίσουμε την ταχύτητα

$$w_D^P \equiv \pm \frac{i\omega}{\Omega_j} \frac{E_x}{B} c$$

που ονομάζουμε ολίσθηση πόλωσης, τότε οι εξισώσεις (4.5) και (4.6) γράφονται

$$\ddot{v}_{xj} = -\Omega_j^2(v_x - w_D^P) \quad (4.7)$$

$$\ddot{v}_{yj} = -\Omega_j^2(v_y - w_D^E) \quad (4.8)$$

όπου $w_D^E = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2 = -(E_x/B)c$. Οι λύσεις των εξισώσεων (4.5) - (4.6) θα πρέπει να είναι κατά προσέγγιση ο γραμμικός συνδυασμός της κυκλοτρονικής κίνησης και της ολίσθησης, άρα παίρνουν τη μορφή

$$v_x = v_\perp e^{i\Omega_j t} + w_D^P \quad (4.9)$$

$$v_y = \pm i v_\perp e^{i\Omega_j t} + w_D^E. \quad (4.10)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο τις εξισώσεις (4.9) - (4.10) έχουμε

$$\ddot{v}_x = -\Omega_j^2 v_x + (\Omega_j^2 - \omega^2) w_D^P$$

$$\ddot{v}_y = -\Omega_j^2 v_y + (\Omega_j^2 - \omega^2) w_D^E$$

που προσεγγίζουν τις εξισώσεις (4.7) - (4.8) μόνο στο όριο που $\Omega_j^2 \gg \omega^2$. Αν το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται πολύ αργά ($\omega \rightarrow 0$) και $\omega^2 \ll \Omega_j^2$, τότε οι εξισώσεις (4.9) και (4.10) είναι οι λύσεις των εξισώσεων (4.7) και (4.8). Από τις λύσεις (4.9) - (4.10) συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του φορτίου σε χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει δύο συνιστώσες, (1) μία κάθετη στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και (2) μια νέα ολίσθηση κατά μήκος του άξονα x . Η νέα αυτή ολίσθηση ονομάζεται 'ολίσθηση πόλωσης' (polarization drift) και στη γενική μορφή της δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{w_{Dj}^P = \pm \frac{1}{\Omega_j B_0} \frac{d\mathbf{E}}{dt} c.} \quad (4.11)$$

Είναι φανερό ότι τα ηλεκτρόνια και πρωτόνια ολισθαίνουν με διαφορετική ταχύτητα και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ρεύματος πόλωσης. Η φυσική ερμηνεία του ρεύματος πόλωσης είναι η εξής: Αν εφαρμόσουμε ξαφνικά στο πλάσμα ένα ηλεκτρικό πεδίο, τα φορτία από αδράνεια θα κινηθούν προς τη διεύθυνση του πεδίου. Όταν η ταχύτητά τους γίνει σημαντική, θα αισθανθούν τη δύναμη Lorentz $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ και θα αλλάξουν πορεία. Αν το ηλεκτρικό πεδίο αλλάξει διεύθυνση τότε θα κινηθούν αντίθετα κ.ο.κ., άρα η w_D^P είναι η ολίσθηση των φορτίων που οφείλεται στην παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου και στην αδράνειά τους.

4.3 Χωρική και χρονική ανομοιογένεια ηλεκτρικού πεδίου

Η παρουσία χωρικής ανομοιογένειας κατά τη διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρικού πεδίου απουσία μαγνητικού πεδίου μπορεί επίσης να δημιουργήσει ολίσθηση των ηλεκτρονίων. Για να μελετήσουμε αυτήν την ολίσθηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μη σχετικιστική εξίσωση

$$m \frac{dv}{dt} = qE$$

υποθέτοντας ότι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου έχει τη μορφή $\mathbf{E} = (0, E_0(y) \cos(\omega t), 0)$.

Αν αγνοήσουμε την χωρική ανομοιογένεια στο πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου, η κίνηση του ηλεκτρονίου έχει τη μορφή $y = (-qE_0/m\omega^2) \cos(\omega t)$. Εάν στη συνέχεια αναπτύξουμε το $E_0(y)$ σε σειρά γύρω από τη μέση θέση του ηλεκτρονίου, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E_0(y) &= E_0(0) + y \frac{\partial E_0(0)}{\partial y} + \dots \\ &= E_0(0) - \frac{qE_0(0)}{m\omega^2} \frac{\partial E_0(0)}{\partial y} \cos(\omega t) + \dots \end{aligned}$$

Άρα η κίνηση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από την εξίσωση

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{q}{m} \cos(\omega t) \left[E_0(0) - \frac{qE_0(0)}{m\omega^2} \frac{\partial E_0(0)}{\partial y} \cos(\omega t) \right]} \quad (4.12)$$

Υπολογίζοντας τη μέση τιμή της εξίσωσης (2.68) βρίσκουμε ότι

$$\left\langle \frac{d^2 y}{dt^2} \right\rangle = - \left(\frac{q}{2m\omega} \right)^2 \frac{\partial E_y^2(0)}{\partial y} = F_p.$$

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι η επιτάχυνση που περιγράφεται από την εξίσωση (4.12) προκαλεί μια ολίσθηση που σπρώχνει τα ηλεκτρόνια από τα σημεία μεγαλύτερης έντασης προς τα σημεία μικρότερης έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Η δύναμη αυτή λέγεται “ponderomotive force” και παίζει σημαντικό ρόλο στα μη-γραμμικά φαινόμενα του πλάσματος όπου τα πεδία είναι πολύ ισχυρά και ανομοιογενή.

4.4 Αδιαβατικές αναλλοίωτες

Δείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι όταν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αργά κατά μήκος της τροχιάς ενός σωματιδίου (π.χ. $\Delta B / \Delta s \ll B / r_L$), ή όταν η μεταβολή του στο χρόνο είναι μικρή για

αρκετές περιόδους ($\Delta B/B \ll t/T$), η μαγνητική ροπή παραμένει σταθερή. Η μαγνητική ροπή είναι ένα παράδειγμα αδιαβατικής αναλλοίωτης και διαφέρει από τα ολοκληρώματα κίνησης στο ότι η σταθερότητά της σχετίζεται με το ρυθμό μεταβολής μιας παραμέτρου, στην προκείμενη περίπτωση του μαγνητικού πεδίου.

4.4.1 Μονοδιάστατη περιοδική κίνηση

Θα μελετήσουμε αναλυτικά τη μονοδιάστατη περιοδική κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα δυναμικό $\varphi(x, t)$ που μεταβάλλεται 'αργά' με το χρόνο (δηλαδή η μεταβολή του σε μια περίοδο T είναι πολύ μικρότερη από την τιμή του).

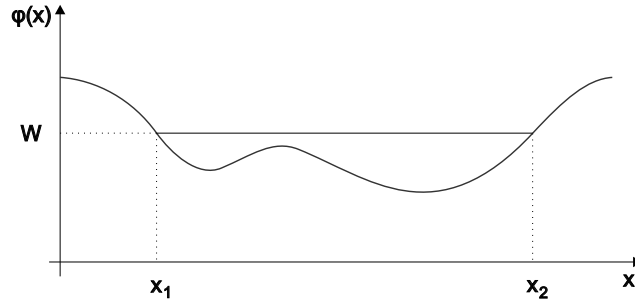
Εάν το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του χρόνου, τότε η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από την εξίσωση

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dx} = 0. \quad (4.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$(m/2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \varphi(x) = W \quad (4.14)$$

όπου W είναι η ενέργεια. Η περίοδος του σωματιδίου υπολογίζεται εύκολα από την εξ. (4.14)



Σχήμα 4.1. Περιοδική κίνηση μέσα σε 'αργά' μεταβαλλόμενο δυναμικό.

$$T = \oint dt = \oint \frac{dx}{[(2/m)(W - \varphi)]^{1/2}},$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται για μια κλειστή τροχιά. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα δράσης J (action integral) με τη σχέση

$$J \equiv \oint p dq = \oint m \left[\frac{2}{m}(W - \varphi) \right]^{1/2} dx,$$

όπου $p = m(dx/dt)$ και $q = x$ είναι οι συζυγείς μεταβλητές και βασιζόμενοι στη σχέση (4.13) θα δείξουμε ότι η J είναι αδιαβατική αναλλοίωτη, δηλαδή $(dJ/dt) = 0$, όταν ισχύουν οι συνθήκες που περιγράψαμε. Η ολική παράγωγος της συνάρτησης J είναι

$$\frac{dJ}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [2m(W - \varphi)]^{1/2} dx \quad (4.15)$$

όπου x_1 και x_2 είναι τα σημεία που η ταχύτητα αναστρέφεται (Σχ. 4.1).

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [2m(W - \varphi)]^{1/2} dx$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} &= [2m(W - \varphi)]_{x_2}^{1/2} \frac{dx_2}{dt} - [2m(W - \varphi)]_{x_1}^{1/2} \frac{dx_1}{dt} \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} [2m(W - \varphi)]^{1/2} dx. \end{aligned}$$

Ο όρος $[2m(W - \varphi)]^{1/2}$ μηδενίζεται στα σημεία x_1 και x_2 , ενώ το

$$\frac{\partial}{\partial t} [2m(W - \varphi)]^{1/2} = \frac{m}{[2m(W - \varphi)]^{1/2}} \left[\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]. \quad (4.16)$$

Υπολογίζουμε τον όρο $(\partial W / \partial t)$ κάνοντας χρήση των εξισώσεων (4.13) και (4.14)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\dot{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

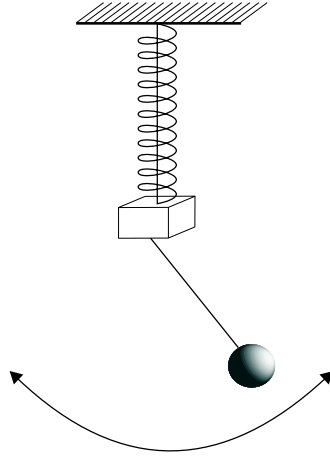
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.16) και χρησιμοποιώντας την (4.13) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} [2m(W - \varphi)]^{1/2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Έτσι παίρνουμε

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx = 0,$$

διότι $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ στα σημεία x_1 και x_2 σύμφωνα με την υπόθεση ότι η αλλαγή του $\varphi(x)$ σε μία περίοδο είναι αμελητέα.



Σχήμα 4.2. Παράδειγμα εκκρεμούς, μικρής γωνίας ταλάντωσης ($\theta \approx 0$), του οποίου το μήκος l αλλάζει αργά και περιοδικά με το χρόνο. Το σύστημα αυτό αποτελεί δυναμικό σύστημα του οποίου η μεταβλητή δράσης αποτελεί σταθερά της κίνησης.

4.4.2 Αρμονικός ταλαντωτής

Η μελέτη ενός αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να μας δώσει ένα παράδειγμα αδιαβατικής αναλλοίωτης.

Είναι γνωστό ότι η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$W = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

και η αδιαβατική αναλλοίωτη J υπολογίζεται από τη σχέση (βλ. (2.73))

$$J = 2 \int_{-\sqrt{2W/m/\omega}}^{\sqrt{2W/m/\omega}} (2mW - m\omega^2 q^2)^{1/2} dq = \frac{W}{\omega} 2\pi. \quad (4.17)$$

Το απλό εκκρεμές, όταν η γωνία ταλάντωσης είναι μικρή, αποτελεί ένα παράδειγμα απλού αρμονικού ταλαντωτή. Αν υποθέσουμε ότι το μήκος του σχοινιού του εκκρεμούς, μικρής γωνίας ταλάντωσης, μεταβάλλεται πολύ αργά (Σχ. 4.2) τότε η ενέργεια W παραμένει ανάλογη της συχνότητας ω . Είναι γνωστό ότι η συχνότητα ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μήκους του σχοινιού του εκκρεμούς, $\omega = \sqrt{g/l}$, άρα και η ενέργεια θα ακολουθεί την ίδια αναλογία.

Η φυσική και ιστορική σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι τεράστια, μια και στις αρχές του αιώνα μας οι πρώτες προσπάθειες κβάντωσης

των ατόμων σχετίζονταν με την κβάντωση των τιμών του ολοκληρώματος δράσης (πρόταση Wilson-Sommerfeld). Ήταν γνωστό ότι αργές μεταβολές του περιβάλλοντος των ατόμων π.χ. του ηλεκτρικού πεδίου δεν προκαλούν μετάπτωση από τη μία κατάσταση στην άλλη. Το πειραματικό αυτό φαινόμενο ερμηνεύτηκε με τη χρήση της απόδειξης που κάναμε, δηλαδή, ότι το ολοκλήρωμα δράσης είναι αδιαβατική αναλλοίωτη.

Παρακάτω θα υπολογίσουμε την αδιαβατική αναλλοίωτη ενός φορτίου που κινείται μέσα σε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 4.1. Στο πλάσμα που θερμαίνεται με αδιαβατική συμπίεση η σταθερότητα της μαγνητικής ροπής απαιτεί το $k_B T_\perp$ να αυξάνει, όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου αυξάνει. Το μαγνητικό πεδίο όμως είναι γνωστό ότι δεν επιταχύνει φορτία γιατί η δύναμη Lorentz είναι κάθετη στην ταχύτητα. Εξηγήστε πώς το φορτίο κερδίζει ενέργεια.
- 4.2. Εάν υποθέσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα ενός μαγνητικού καθρέφτη είναι $B_z = B_0(1 + a^2 z^2)$ όπου B_0 και a γνωστές σταθερές.
 - (α) Σε ποιο σημείο του z θα ανακλαστεί ένα ηλεκτρόνιο που στο σημείο $z = 0$ έχει ταχύτητα $v^2 = 3v_{\parallel 0}^2 = 1.5v_{\perp 0}^2$;
 - (β) Γράψτε την εξίσωση της κίνησης του οδηγού κέντρου για την παράλληλη προς το μαγνητικό πεδίο διεύθυνση.
 - (γ) Δείξτε ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τη συχνότητα της ταλάντωσης.
 - (δ) Υπολογίστε τη διαμήκη αδιαβατική αναλλοίωτη (longitudinal adiabatic invariant).
- 4.3. Υπολογίστε την πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη για φορτία που κινούνται με σχετικιστική ταχύτητα, κάνοντας χρήση της συνάρτησης Langrange και ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την απόδειξη στο κεφάλαιο 2.
- 4.4. Σχεδιάζουμε τη κατασκευή μιας μηχανής πλάσματος για να θερμάσουμε το πλάσμα με τη μέθοδο της μαγνητικής συμπίεσης. Υποθέτουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει τη διεύθυνση του άξονα Oz και ακολουθεί τις χρονικές μεταβολές που περιγράφουμε στη συνέχεια. Το πλάσμα αρχικά είναι σε θερμοκρασία 10eV , βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας και το μαγνητικό πεδίο έχει τιμή $B_1 = 1\text{kG}$. Το πλάσμα συμπιέζεται στη συνέχεια αδιαβατικά για T_1 σεζονδς $\gg (2\pi/\Omega)$ και το μαγνητικό πεδίο φτάνει τη νέα του τιμή $B_2 = 5\text{kG}$. Παραμένει στην κατάσταση αυτή για T_2 σεζονδς $\gg T_c$, όπου T_c είναι χρόνος που απαιτείται για να γίνει η κατανομή πάλι ισότροπη. Τέλος το μαγνητικό πεδίο επιστρέφει στην αρχική τιμή σε χρόνο T_1 , ενώ το πλάσμα γίνεται ισότροπο. Ο ίδιος κύκλος επαναλαμβάνεται για N φορές. Πόσους τέτοιους κύκλους θα χρειαστούμε για να φτάσει η τελική θερμοκρασία τα 10keV .